信号与系统

第一性原理小册子

从零开始，用最朴素的思想构建整个知识体系

复杂事物 = 简单事物的组合

这就是信号与系统的全部秘密

基于 learn_fast 资料汇编

由 Pandoc + XeLaTeX 自动生成

June 30, 2026

Contents

0.1 信号与系统：第一性原理小册子

从零开始，用最朴素的思想，构建整个信号与系统知识体系

0.1.1 这本小册子的写法

传统教材从定义出发，这本小册子从问题出发。

每一章解决一个核心问题，从”为什么需要这个东西”开始，逐步推导出整个理论。不需要微积分基础（会解释每一步），只需要最朴素的逻辑思维。

0.1.2 五步思想旅程

```
现实世界的问题
    v
为什么需要信号与系统？（Part 1）
    v
如何分解复杂信号？（Part 2：傅里叶思想）
    v
如何分析不稳定系统？（Part 3：拉普拉斯思想）
    v
计算机如何处理信号？（Part 4：离散与Z变换）
    v
这一切的内在联系？（Part 5：统一视角）
```

0.1.3 内容结构

部分	核心问题	解决思路
Part 1	信号是什么？系统是什么？	从温度计、音响等日常例子出发
Part 2	如何看清信号的”成分”？	傅里叶：把信号拆成不同频率的正弦波
Part 3	如何分析系统的”性格”？	拉普拉斯：把微分方程变成代数方程
Part 4	计算机怎么处理信号？	采样 + 差分方程 + Z 变换
Part 5	这一切有什么联系？	四大变换的对比和统一

0.1.4 阅读建议

- 第 1 遍：只读每部分的”核心思想”（粗体部分）和”一句话总结”
- 第 2 遍：读”为什么”部分
- 第 3 遍：看推导和例子

0.1.5 输出文件

文件	内容
part1_信号是什么.md	Signals & Systems 基本概念
part2_分解的魔法.md	傅里叶级数 -> 傅里叶变换
part3_推广变换.md	拉普拉斯变换
part4_离散世界.md	离散时间 + Z 变换
part5_统一视角.md	四大变换对比 + 总结

0.2 Part 1：信号是什么？系统是什么？

> 核心问题：这世界充满各种变化，我们怎么描述它？怎么利用它？
>
> 目标：用最直觉的方式，建立信号与系统的世界观——不需要微积分，只需要好奇心。

0.2.1 写在前面：为什么你正在学这门课？

想象一下，你拿着手机听音乐——手机里的电信号变成声音传到耳朵；你说"Hey Siri"，声音变成电信号被手机理解。你在微信发照片，照片被压缩、传输、解压，最终显示在朋友手机上。你做心电图，心脏的电信号被放大、滤波，医生根据这个信号判断你的健康。

这背后全部是" 信号与系统"。

这门课不是在教你一堆数学公式。它在教你一个看待世界的框架：任何事情只要" 会变化"，你就可以用信号来描述它；任何设备只要" 处理信息"，你就可以用系统来分析它。

准备好了吗？我们从最基础的东西开始。

0.2.2 1. 信号就是" 会变化的东西"

> 问题：怎么描述一个正在变化的世界？

桌子上的水杯没有变化——它就在那里，静止不动。但你的体温在变化（早上低、下午高），窗外的声音在变化（汽车经过时声音大、安静时声音小），手机屏幕的亮度在变化（自动调节）。

世界的本质不是静止的，而是变化的。

那问题来了：怎么把这些变化" 记录下来" 并" 说给别人听"？

核心思想

> 信号 = 一个物理量随时间（或空间）的变化过程

说得更直白一点：- 把温度计放在窗口，每隔 1 分钟记一次数字 -> 你得到了一个" 温度信号" - 用麦克风录音，记录空气振动 -> 你得到了一个" 声音信号" - 用手机拍照，记录每个点的亮度 -> 你得到了一个" 图像信号"

只要某样东西在变化，并且这些变化携带着信息，它就是信号。

直观理解：三种最常见的信号

(1) 温度信号——最容易理解的信号 你发烧了，体温变化：

```
体温(°C)
 39 +         /\
 38 +   /\/   \/\
 37 +-'          '--
    +----------------> 时间(小时)
      0   2   4   6
```

这个图表达的是：体温随时间变化。横轴是时间，纵轴是温度。这就是一个信号。

> 你不需要任何数学，你已经理解了什么是信号。信号就是" 一个东西怎么变" 的记录。

(2) 声音信号——空气在" 抖" 当你说话时，声带振动，压缩周围的空气。这个振动传到别人耳朵里，别人就听到了你的声音。

空气中的气压在快速变化：

```
气压
   /\        /\
  /  \      /  \
 /    \    /    \
'      \/        '---> 时间
```

这个上下抖动的曲线就是声音信号。频率越高，音调越高；幅度越大，音量越大。

你不需要学傅里叶变换才能理解声音——你每天都在用耳朵处理声音信号。

(3) 图像信号——把" 空间" 也加进来 温度信号、声音信号，都是随时间变化的。但一张照片呢?

照片不会随时间变化（除非是视频），但它在空间上变化：

```
    <- 横坐标（像素位置）
  +-----------------+
  |                 |
  |                 | 纵坐标
```

```
|                    |（像素位置）
|                    |
+-----------------+
```

每个点的亮度不同：亮的区域数值大，暗的区域数值小。

所以图像是随位置变化的信号。更准确地说，图像是两个空间变量的函数：$f(x, y)$ 表示在位置 (x, y) 处的亮度。

信号无处不在。它们就是" 世界的变化"。

信号分类：连续 vs 离散

这是个重要的分类，但理解起来很简单。

连续时间信号：每时每刻都有值　就像水龙头流出的水——每一瞬间都有流量。

```
流量     /\          /\
       /  \      /  \
      /    \  /    \
     '      \/      '---> 时间(连续)
```

数学上写为 $x(t)$，意思是" 在时刻 t 的取值"。t 可以取任何值——1 秒、1.5 秒、1.578423 秒，都可以。

离散时间信号：只在特定时刻有值　就像股票的每日收盘价——只在每天收盘时有价格，中间的时间没有记录。

```
价格
  ^
  |
  |
  |
  |
  +-- -- -- -- -- -> 时间(离散)
     1   2   3   4   5
```

数学上写为 $x[n]$，意思是" 在第 n 个时刻的取值"。n 只能是整数——第 1 天、第 2 天、第 3 天……

为什么这个区分很重要？

类型	例子	数学表示	对应的工具
连续信号	模拟录音带、真实世界的声音	$x(t)$	傅里叶变换、拉普拉斯变换

类型	例子	数学表示	对应的工具
离散信号	MP3、数码照片、股票数据	$x[n]$	Z 变换、数字信号处理

真实世界是连续的（声音连续振动），但计算机只能处理离散的（数字录音）。连续 -> 离散 -> 处理 -> 还原成连续，这就是现代信号处理的全过程。

> 你会在 Part 4 深入理解这个转换。现在只需要知道：连续是” 每时每刻”，离散是” 每隔一段时间记一次”。

一句话记忆

> 变化就是信号。

0.2.3 2. 系统就是” 把信号变一下的东西”

问题：有了信号，然后呢？

光有信号还不够。你有一个带回声的声音信号（从演唱会录的），你想要去回声。你有一张昏暗的照片，你想要调亮。你有一个人的说话录音，你想要识别他在说什么。

这些” 处理信号” 的东西，就是系统。

核心思想

> 系统 = 输入一个信号 -> 做某种变换 -> 输出另一个信号

这是理解整个课程最关键的思维模型：

```
输入信号 x(t)         [  系统  ]         输出信号 y(t)
--------------->    +----------+     --------------->
                   | 做点啥   |
                   +----------+
```

信号是原材料，系统是加工厂。

直观理解：三个身边的例子

(1) 音响系统：放大器

```
微弱电信号             音响系统              震耳欲聋的声音
--------------->    +----------+     --------------->
                   | 放大信号 |
                   +----------+
```

麦克风拾取的声音信号非常微弱，经过音响的放大，变成能推动喇叭的大信号。

音响做的事情很简单：输出 = 输入 × 放大倍数。

数学上：$y(t) = A \cdot x(t)$，其中 A 是放大倍数。

(2) 手机滤镜：图像处理器

```
原始照片              滤镜系统              美颜后的照片
--------------->    +----------+    --------------->
                    | 调色+磨皮 |
                    +----------+
```

输入是一张原始照片信号，滤镜做了两件事：- 让皮肤更光滑（某种”滤波”）- 让颜色更鲜艳（某种”变换”）

输出是一张更好看的照片。

(3) 回声消除：你的耳机在做的事

```
带回声的语音            回声消除系统          干净的语音
--------------->    +----------+    --------------->
                    | 去掉回声  |
                    +----------+
```

你在 Zoom 会议里说话，对方听到有回声。回声消除系统分析：哪些是原始声音？哪些是回声（延迟的、减弱的版本）？然后去掉回声。

这比放大复杂得多——系统需要知道”延迟了多久”、“衰减了多少”。

这些例子的共同点：都有一个输入信号，经过某种处理，得到输出信号。

系统的”性格”由什么决定？

不同的系统对同一个输入有不同反应。给同一个声音信号：- 低音炮：保留低音，减弱高音（低通滤波器）- 高音喇叭：保留高音，减弱低音（高通滤波器）- 均衡器：某些频段加强，某些频段减弱

系统的”性格”就是它对输入信号的改造方式。

在后面的课程中，我们会学习如何精确描述这种”性格”。

一句话记忆

> 系统把信号从一种形式变成另一种。

0.2.4 3. 为什么要分析系统？

问题：知道什么是系统之后，然后呢？

好，现在你知道信号是什么、系统是什么了。但这就够了吗？

想象你正在设计一个助听器。你把麦克风放在耳朵上，你需要：放大某些频率的声音（人声），减弱其他频率的声音（噪音），同时确保不会突然爆音把用户耳朵震坏。

你需要预测：给定一个输入，系统的输出是什么？

核心思想

系统分析的目标：预测、稳定性、设计。

学完这门课，你应该能回答三个问题：1. 预测：给一个输入，输出会是什么？2. 稳定性：系统会失控吗？（输出会不会无限大？）3. 设计：怎么设计系统，让它做我想要的事？

贯穿全书的核心例子：**RC** 电路

这是信号与系统课上最重要的简单电路。为什么？因为它太简单了，但包含了所有核心思想。

![RC 电路示意]

```
      电阻 R
  +---/\/\/\/---+
  |             |
 Vin            |
 (输入)         C  电容
  |             |
  +-------------+
                   Vout (输出)
```

它是什么？ RC 电路就是一个电阻 R 和一个电容 C 串联。

- 输入 $x(t)$：施加在电路两端的电压（随时间变化）
- 输出 $y(t)$：电容两端的电压（我们测量这个）

它做什么？ RC 电路可以理解为一个" 平滑器"：

- 如果输入电压突然跳变（从 0V 跳到 5V），输出电压不会立刻跳变——它会缓慢上升，直到接近 5V。
- 如果输入电压快速抖动，输出电压会" 忽略" 这些快速变化，只跟随缓慢变化。

  这就像一个有" 惯性" 的系统——它拒绝快速变化，只跟随慢速变化。

为什么用它贯穿全书？ 因为这个电路：| 分析方法 | 能告诉我们什么 | |———-|—————| | Part 1（直觉）| "这系统平滑了输入" | | Part 2（傅里叶）| "它削弱了高频，保留了低频" -> 低通滤波器 | | Part 3（拉普拉斯）| "它的微分方程可以变成代数方程求解" | | Part 4（离散）| "用数字电路可以模拟这个行为" |

一个电路，四种视角。这就是这门课的精髓。

三个核心问题在 **RC** 电路上的体现

1. 预测：如果输入是一个方波（0V->5V->0V->5V...），输出会是什么样？

   - 答：输出会变成" 圆角方波"——电容充放电需要时间。

2. 稳定性：如果输入是正弦波，输出会不会越来越大直到爆炸？
    - 答：不会。RC 电路是天生稳定的。输入多大，输出最大也就多大，不会失控。
3. 设计：我想让 RC 电路只让 20Hz 以下的声音通过（低通滤波器），R 和 C 应该怎么选？
    - 答：选 RC 乘积使得截止频率 $f_c = \frac{1}{2\pi RC} = 20\text{Hz}$。

三个核心问题的更广视角

稳定性的直觉：> 稳定 = 输入有限，输出也有限。> 你踢一下秋千（有限输入），秋千晃几下停下来（稳定系统）。> 你踢一下秋千，秋千越晃越高直到翻过去（不稳定系统）。

设计系统的直觉：> 设计 = 选择合适的参数，让系统做你想要的事。> 就像调音响的均衡器——你想让低音重一点，就把低频旋钮调大。

一句话记忆

分析系统 = 预测它 + 确认它稳定 + 设计它。

0.2.5 4. 最重要的一类系统：LTI（线性时不变系统）

问题：世上有各种各样的系统，从哪里开始？

有的系统复杂得可怕——人的大脑就是一个系统，输入是感官信号，输出是思想和行动。这种系统目前根本无法用数学完整描述。

我们需要从最简单、最有用的一类系统开始。

这就是 **LTI** 系统——现实世界中大量系统（包括 RC 电路）都属于这一类。

核心思想

LTI = Linear（线性）+ **Time-Invariant**（时不变）

线性：输入放大 -> 输出同比例放大；输入叠加 -> 输出叠加时不变：今天做和明天做，效果一样

这两个性质加在一起，让系统变得异常简单——只要知道它对一个" 冲激" 的反应，就能知道它对任何输入的反应。

直观理解：线性（**Linear**）

(1) 齐次性（比例放大）

输入放大 **k** 倍，输出也放大 **k** 倍。

```
输入 x(t)       -> 输出 y(t)
输入 2 • x(t)    -> 输出 2 • y(t)
输入 0.5 • x(t) -> 输出 0.5 • y(t)
```

生活中的例子：- 音响是线性的（理想情况下）：你把音量旋钮调大一倍，声音也大一倍。- 一面镜子是线性的：你离远一倍，像也缩小一倍（近似）。

反例：- 麦克风过载：你喊得太大，声音会破裂失真——输出不再随输入比例变化。这不是线性。

(2) 可加性（叠加原理）

> 两个输入的和 = 各自输出的和。

```
输入 A     -> 输出 y_A
输入 B     -> 输出 y_B
输入 A+B   -> 输出 y_A + y_B
```

这就是" 叠加原理"。这是信号与系统最重要的概念之一。

生活中的例子：- 两个人同时说话，你听到的是两个人的声音叠加在一起。- 如果把两个人的录音分别播放，然后把两个播放的声音同时放，和两个人同时说话是一样的。

叠加原理的威力：如果你知道系统对" 基本信号" 的反应，你就可以通过组合这些基本信号，得到任何输入的反应。这就像：- 你知道怎么搭积木块（基本信号的处理结果）- 你就可以搭出任何形状（任何信号的处理结果）

线性的数学表达（不害怕，很直观） 如果系统对输入 $x_1(t)$ 输出 $y_1(t)$，对输入 $x_2(t)$ 输出 $y_2(t)$，那么对输入 $a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$（其中 a、b 是任意常数），输出一定是：

$$y(t) = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

翻译成人话：你把两个输入按比例混合，系统输出的就是两个对应的输出按同样比例混合。

直观理解：时不变（**Time-Invariant**）

核心思想：延迟输入 = 延迟输出

> 现在做和以后做，效果一样。

```
---上午按门铃--->  门铃响
---下午按门铃--->  门铃响（同样的声音，只是时间不同）
```

数学上：如果输入 $x(t)$ 产生输出 $y(t)$，那么输入 $x(t-t_0)$（延迟了 t_0 时间）产生输出 $y(t-t_0)$（输出也延迟同样的时间）。

生活中的例子

- 门铃：时不变。你早上按门铃和晚上按门铃，门铃声音一样（除了时间不同）。
- 音响：时不变（理想）。今天放这首歌和明天放这首歌，音响出来的声音一样。
- **RC** 电路：时不变。今天给一个方波和明天给一个方波，输出波形完全一样（只是时间不同）。

反例：- 浴缸放水：时变。早上放水和晚上放水，出水的温度可能不同（因为热水器可能被其他人用过了）。- 老化电子元件：时变。去年和今年的音响听起来不一样了，因为元件老化了。

为什么时不变如此重要？ 因为它让预测变得可行！如果系统是时变的，你每天都需要重新学习和测试它。如果系统是时不变的，你学一次就够了——今天的规律明天仍然适用。

为什么 **LTI** 是信号与系统的”圣杯”？

有了线性和时不变，一个惊人的结果出现了：

> **LTI** 系统可以被它的”冲激响应”完全描述。

冲激响应是什么？

- 你给系统一个非常短、非常猛的输入（就像拍了桌子一下）
- 系统会”震动”一下然后恢复
- 这个”震动”的波形就是冲激响应

LTI 系统的神奇之处在于：只要你知道了这个”震动”的波形，你就知道系统对任何输入的响应。

为什么？因为你把任何输入信号都看成”无数个不同时刻、不同大小的拍桌子”的叠加。利用线性（叠加原理）和时不变（延迟相同），你就可以把无数个”拍桌子响应”拼成最终的输出。

这就是卷积的思想。你会在这门课的第二章学到它。

```
知道了冲激响应 h(t)
      v
任何输入信号 x(t) -> 输出信号 y(t) = x(t) 与 h(t) 的卷积
```

公式：$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

现在别怕这个积分——Part 2 和 Part 3 会把它变成简单的乘法。这就是傅里叶变换和拉普拉斯变换要做的事！

不是 **LTI** 的例子——帮你加深理解

系统	为什么不是 LTI?
平方器：$y(t) = [x(t)]^2$	非线性。输入 2 倍，输出 4 倍（不是 2 倍）
时间压缩器：$y(t) = x(2t)$	时变。输入延迟不代表输出也延迟同样时间
阈值检测器：$y = 1$ 如果 $x > 0$ 否则 $y = 0$	非线性。两个小信号叠加可能超过阈值，但各自都不超过

系统	为什么不是 LTI?
人耳	近似线性但非时不变？如果听同一首歌你心态不同感受不同

一句话记忆

LTI = 输入放大 **n** 倍输出放大 **n** 倍 + 今天做和明天做一样。

0.2.6 5. 核心思想预告：分解的力量

问题：一个超级复杂的问题，怎么解？

想象你面前有一碗超级复杂的乐高模型。你该怎么理解它？

你可以把它拆成一块块乐高积木。理解了每一个积木块，你就理解了整个模型。

这是整个信号与系统课程最重要的思想，没有之一。

核心思想

复杂问题 -> 拆成简单问题 -> 分别解决 -> 组合答案。

这个编程里叫" 分治法"，在信号与系统里叫 "分解"。

LTI 系统的" 分解" 策略

我们已经学过了：LTI 系统可以通过冲激响应来完全描述。但卷积计算很麻烦（有积分）。

这门课的后续每一章，本质上都是在回答：怎么把" 复杂信号" 拆成" 基本信号" 的叠加，使得计算变得简单？

```
                +-----------------+
输入信号         |    怎样分解？    |     输出信号
(复杂的)         |                 |    (我们想要的)
                |  拆成基本信号     |
                |  分别处理        |
                |  组合结果        |
                +-----------------+
```

各种" 拆法" 一览

方法	把信号拆成...	有什么用?
冲激分解	不同时刻的冲激	Part 2 前奏：引出卷积
傅里叶分解	不同频率的正弦波	Part 2 主菜：看清信号的" 频率成分"
拉普拉斯分解	指数增长/衰减的正弦波	Part 3：分析不稳定系统

方法	把信号拆成...	有什么用?
Z 变换	离散世界的”拉普拉斯”	Part 4：计算机信号处理

每一种分解方式，都是把这个”拆解”思想的具体化。

预告：傅里叶是怎么拆的？

傅里叶提出了一个疯狂的想法：

> 任何信号（无论多复杂）都可以写成不同频率、不同幅度、不同相位的正弦波的叠加。

就像白光经过三棱镜被分解成彩虹——七种颜色的光叠加成白光。

```
          |
复杂信号|   /\         /\
  f(t) | /  \      /  \           -->  三棱镜（傅里叶变换）
       |/    \   /     \
       |       \/       \
       +----------------

       +--------------------+
       |                    |
  低频   /\     频率成分分布     /\   高频
 正弦波/  \     /\      /\     /  \ 正弦波
     /     \  /  \   /  \  /     \
        频率低<---------->频率高
```

你猜为什么正弦波这么特殊?

因为正弦波通过 **LTI** 系统后，仍然是正弦波——只是幅度和相位变了！

这意味着如果你把输入拆成正弦波，每个正弦波通过系统后你都知道结果（幅度变了、相位变了)，把它们加起来就得到了最终的输出。

这就是傅里叶变换的魔力。 Part 2 会详细讲这个。

一句话记忆

> 任何信号都可以拆成简单信号的叠加。

0.2.7 知识地图：Part 1 所有概念的关系

```
+------------------------------+
|     现实世界的变化（温度、声音、图像）|
+--------------+---------------+
```

```
                       | 抽象

                +----------------------+
                |        信号 x(t)      |
                |  "携带信息的变化"      |
                +--+-------+-----------+
                   |       |
          +---------+       +---------+

+------------------+       +--------------------+
|  连续时间信号     |       |  离散时间信号       |
|  x(t), 每时每刻  |       |  x[n], 每隔一段     |
+------------------+       +--------------------+
           |                         |
           +----------+-------------+
                      | 进入系统

            +--------------------+
            |       系统          |
            |  输入 -> 变换 -> 输出  |
            +----------+---------+
                       |
            +----------+----------+
            |                     |

  +------------------+   +-------------------+
  |     线性 (L)      |   |  时不变 (TI)       |
  | 比例放大 + 叠加   |    |  延迟不变           |
  +--------+--------+   +---------+--------+
           |                      |
           +----------+----------+

            +----------------------+
            |     LTI 系统          |
            |  可用冲激响应完全描述    |
            +----------+-----------+
                       |
            +----------+----------+
            |                     |

  +------------------+   +-------------------+
  |    核心思想        |   |  应用目标           |
```

```
| "分解 + 组合"    |   | 预测 • 稳定 • 设计      |
+--------+--------+   +-------------------+
         |


+-----------------+
|  Part 2 预告     |
| 傅里叶：拆成正弦波|
+-----------------+
```

0.2.8 总结：Part 1 你一定要记住的 5 句话

#	一句话	对应的概念
1	变化就是信号。	信号的定义
2	系统把信号从一种形式变成另一种。	系统的定义
3	分析系统 = 预测 + 稳定 + 设计。	为什么学这个
4	**LTI** = 放大 **n** 倍输出 **n** 倍 + 今天做和明天一样。	线性 + 时不变
5	任何信号都可以拆成简单信号的叠加。	整门课程的核心思想

0.2.9 Part 1 自测题

学完这一部分，你应该能回答以下问题。如果不能，建议回去再看一遍相关章节。

基础题（立刻回答）：1. 什么是一个信号？举三个生活中的例子。2. 什么是一个系统？举两个生活中的例子。3. 连续信号和离散信号的区别是什么？4. 什么是线性？用”放大”和”叠加”两个词解释。5. 什么是时不变？用一句话解释。

思考题（需要想一下）：6. 一个”平方器”系统 $y(t) = [x(t)]^2$ 是线性的吗？为什么？7. 为什么 LTI 系统如此重要？8. 怎么看 RC 电路是一个系统？它的输入是什么？输出是什么？9. “分解思想”在信号与系统课程中有多重要？它能用在哪些地方？

挑战题（如果你觉得前面的太简单）：10. 假如一个系统 $y(t) = x(t) + 1$（输出 = 输入 + 1），它是线性的吗？给个理由。（提示：检查叠加原理是否成立）

0.2.10 Part 2 预告

现在我们知道了：- 信号是会变化的东西 - 系统是改变信号的机器 - **LTI** 系统是最重要的一类系统

但有一个致命的问题没解决：

> 卷积运算 $y(t) = x(t) * h(t)$ 太难算了！每次都要算一个积分，好麻烦！

怎么办？
在 Part 2 中，我们会学到一个天才的解决方案：

> 换个角度看问题。把信号从" 时间" 换到" 频率" 去看。

就像戴上特殊的眼镜，原本在时域里复杂无比的东西，到了频域里变得简单得令人难以置信——卷积变成了乘法。

你不需要会算积分。你只需要知道：- 任何信号都可以拆成不同频率的正弦波 - 正弦波通过 LTI 系统后还是正弦波（只是幅度和相位变了）- 所以只要知道系统对每个频率怎么处理，你就知道它对所有信号的处理结果

这就是 《**Part 2**：分解的魔法——从傅里叶级数到傅里叶变换》。

> "所有科学都是日常思考的精致化。" —— 阿尔伯特·爱因斯坦

0.3 Part 2：分解的魔法 — 傅里叶思想

> 核心问题：如何把复杂信号拆开，看清它的" 成分"？

0.3.1 知识地图

```
+-----------------------------------------------------------+
|                   Part 2: 分解的魔法                    |
|                                                           |
|  现实问题：复杂信号像一杯混合果汁，怎么知道里面有什么？        |
|         |                                                 |
|                                                           |
|  基本砖块：正弦波 —— 经过LTI系统后还是正弦波，是最简单的成分        |
|         |                                                 |
|         +-----> 周期信号 -> 傅里叶级数（离散频率）            |
|         |          方波 = sin(t) + sin(3t)/3 + sin(5t)/5 + ... |
|         |                                                 |
|         +-----> 非周期信号 -> 傅里叶变换（连续频率）          |
|                    所有频率连续分布                          |
|         |                                                 |
|                                                           |
|  频域的威力：                                              |
|    1. 卷积变乘法（省大事了！）                               |
|    2. 滤波器设计（让想要的过，不想要的拦）                     |
|    3. 采样定理（数字时代的基石）                              |
```

```
|          |                                                          |
|                                                                   |
|  预告 Part 3：傅里叶只能分析"稳定"系统，拉普拉斯来解决               |
+------------------------------------------------------------------+
```

0.3.2 1. 问题：如何分析复杂信号？

1.1 一杯混合果汁

想象你面前有一杯果汁。喝一口，味道很复杂 — 有点甜、有点酸、还有点涩。你怎么知道这里面有什么？

你可能会想：这杯果汁 = 橙汁 + 苹果汁 + 西瓜汁。

换句话说——你把复杂的东西想象成简单东西的组合。然后你就能分析了：- 甜味 -> 来自苹果汁 - 酸味 -> 来自橙汁 - 清爽感 -> 来自西瓜汁

信号分析也是一样。我们拿到一个复杂的信号，想知道" 里面有什么"。

1.2 一段音乐

你听到一段音乐。它是很多种声音混在一起的：- 歌手的声音 - 吉他的声音 - 鼓的声音 - 贝斯的声音

你的耳朵神奇地能做到一件事：从混合的声音中提取你关注的那个。在嘈杂的派对上，你还能听到朋友说话 — 这叫" 鸡尾酒会效应"。

> 你的大脑天生就会做" 信号分解"。但我们的大脑说不清自己是怎么做到的。数学的作用就是：把这种本能变成精确的工具。

1.3 核心思想

复杂事物 = 简单事物的组合。

就这么简单。

生活中到处都是这个思想：- 物质由元素组成（元素周期表）- 颜色由三原色组成（RGB）- 音乐由音符组成（Do Re Mi Fa So La Ti）- 句子由单词组成 - 程序由函数组成

信号也一样。任何一个复杂信号，都可以写成一堆简单信号的加权和。

> 关键问题是：选什么作为" 简单信号"？

1.4 一句话记忆

> 复杂信号 = 简单成分的叠加。分析信号，就是找出它的" 成分清单"。

0.3.3 2. 找到" 基本砖块"：正弦波

2.1 用什么砖块来盖房子？

如果我们想把任意信号拆开，第一个问题就是：用什么作为基本砖块？

你可以用很多种砖块：- 用脉冲（一个尖峰）作为砖块 — 这就是卷积的思路（Part 1 讲过）- 用台阶作为砖块 - 用抛物线作为砖块

但这些都不完美。因为选了它们之后，分析系统行为还是很难。

我们需要一种砖块，它必须满足一个关键性质：

> 如果一个系统是 **LTI**（线性时不变），那么当正弦波输入进去，出来的还是正弦波。

2.2 这是最重要的洞察

这也是整个 **Part 2** 最重要的一句话：

> 正弦波是 **LTI** 系统的" 特征函数"。

什么意思？想象一个特别的函数 $f(t)$，你把它丢进一个 LTI 系统，出来的结果是 $f(t)$ 的" 缩放版"（幅度变了）和" 平移版"（相位变了），但形状完全不变。

如果用数学写：

$$\cos(\omega t) \xrightarrow{\text{LTI 系统}} |H(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$$

翻译成人话：- 输入：一个特定频率 ω 的余弦波 - 输出：同样频率 ω 的余弦波 - 幅度变了（乘以 $|H(j\omega)|$）- 时间位置变了（加上 $\angle H(j\omega)$）

频率没有变！这是关键。

2.3 类比：棱镜与白光

如果你有一束白光（复杂的），把它射进三棱镜，会发生什么？

白光 -> 棱镜 -> 彩虹（红橙黄绿蓝靛紫）

三棱镜把" 复杂" 的白色光，分解成了" 简单" 的不同颜色的光。

在信号世界里，傅里叶分析就是那个棱镜：- 输入：复杂的信号 - 输出：各个频率的分量

> 白光由不同颜色的光组成 <-> 信号由不同频率的正弦波组成

不同的频率就像不同的颜色。低频像红色，高频像紫色。

2.4 为什么正弦波这么特殊？

这就涉及到微分方程了 — 但别怕，我们用直觉理解。

很多物理系统可以用微分方程描述。正弦波有一个奇妙的性质：对它求导（或者积分），还是正弦波。

- $\frac{d}{dt}\sin(\omega t) = \omega\cos(\omega t)$ —— 还是正弦波（只是变成了余弦）
- $\frac{d}{dt}\cos(\omega t) = -\omega\sin(\omega t)$ —— 还是正弦波（带负号）

而 LTI 系统做的事，本质上就是：加、乘常数、微分、积分。这些操作对正弦波来说，都不会改变它的频率。

这就解释了为什么正弦波经过 LTI 系统后，频率不变。

2.5 一句话记忆

> 正弦波是 LTI 系统的" 自然语言"——系统对它" 无话可说"，只能调整大小和位置，改变不了它原本的样子。

0.3.4 3. 第一步：周期信号的分解（傅里叶级数）

3.1 什么是" 周期"？

周期信号就是重复的信号。

比如：- 心跳：一直重复" 咚哒咚咚哒…" - 钟摆：一直左右摇摆 - 交流电：50Hz，每秒重复 50 次 - 一个音符：弦的振动是周期性的

数学上，周期信号满足：

$$x(t+T) = x(t)$$

其中 T 是周期。比如 50Hz 交流电的 $T = 1/50 = 0.02$ 秒。

3.2 核心思想：任何周期信号都能拆成正弦波

这是那个让傅里叶名垂青史的发现：

> 任何周期信号（只要不太" 离谱"），都可以写成无数个不同频率正弦波的加权和。

数学形式：

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

等等，别被公式吓到。我们来翻译它：- ω_0 — 基频（就是信号重复的基本频率，$\omega_0 = 2\pi/T$）- $n\omega_0$ — 倍频（$2\omega_0$ 是 2 倍频，$3\omega_0$ 是 3 倍频…）- a_0 — 直流分量（平均值）- a_n, b_n — 权重（代表每个频率有多少）

说白了：**一个周期信号 = 基频 + 2 倍频 + 3 倍频 + … 的叠加。**

3.3 例子：方波 = 正弦波的" 叠罗汉"

想象一个方波（在 -1 和 +1 之间来回跳）。

傅里叶告诉我们：

```
方波 = 1×sin(t) + 1/3×sin(3t) + 1/5×sin(5t) + 1/7×sin(7t) + ...
```

让我们看看这有多酷：

```
只加第一项：    ~~~   一个正弦波，完全不是方波
加前两项：     ~~~~   开始像了，边缘有点变陡
加前三项：     ~~~~~   更像了，边缘更陡
加前四项：     ~~~~~~   几乎就是方波了！
加无限项：     -----   完美方波
```

我们可以用 ASCII 画出来，看看叠加的效果：

```
sin(t) 单独：
..      ..      ..
\/------\/------\/

sin(t) + sin(3t)/3：
..    ..    ..    ..
 \/----\/----\/----\/

sin(t) + sin(3t)/3 + sin(5t)/5：
顶部开始变平，边缘变陡

继续加到第N项：
顶部越来越平，边缘越来越陡
最终 ->
+-----+  +-----+  +-----+
|     |  |     |  |     |
+-----+  +-----+  +-----+
```

这就是傅里叶级数的魔法：用正弦波” 拼” 出任何形状！

3.4 系数 a_n, b_n 是什么意思？

每个系数代表” 信号中这个频率的分量有多少”。

- a_n 大 -> 这个频率的余弦成分多
- b_n 大 -> 这个频率的正弦成分多
- 某个 n 的系数为 0 -> 信号中没有这个频率的分量

这就像问：这杯果汁里有多少橙汁？多少苹果汁？系数就是” 每种成分的含量”。

3.5 更优雅的写法：指数形式

工程上更喜欢用另一种写法（别怕，只是换个马甲）：

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

这里用了欧拉公式：$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$。
本质上和一式一样，只是写法更紧凑。c_n 就是” 频率为 $n\omega_0$ 的分量有多少”。

不用记住这个，只要知道：c_n 告诉我们信号在第 n 个频率上有多少” 能量”。

3.6 一句话记忆

周期信号 = 基频 + 整数倍频的正弦波叠加。方波看起来” 方”，是因为无数个正弦波” 叠” 在一起的结果。

0.3.5 4. 第二步：非周期信号的分解（傅里叶变换）

4.1 大多数信号都不是周期的

真实世界中的信号很少是完美周期的：- 你说的一句话（不是重复的）- 一首歌（有开始有结束）- 一次地震的波形 - 一张图片

这些信号不重复，怎么用傅里叶级数？

答：把它们当成周期无限大的信号。

4.2 核心思想：从离散频率到连续频率

周期信号的频率是” 离散的”：只有 $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \ldots$

非周期信号呢？所有频率都可能存在。

想象你从远处看一把梳子：- 周期信号 -> 梳子的齿（离散的点，隔一段距离一个）- 非周期信号 -> 梳子靠太近了，连成了一片（连续）

这就是傅里叶变换：

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

公式看起来很吓人。但它的意思是：

对于每一个频率 ω，算一下信号 $x(t)$ 中” 含有” 多少这个频率的成分。

输出 $X(j\omega)$ 是一个函数，它告诉你：信号在每个频率 ω 上有多大的分量。

4.3 从级数到变换的” 思想飞跃”

傅里叶级数	傅里叶变换
只适用于周期信号	适用于任何信号
频率是离散的（跳着来）	频率是连续的
输出是一堆系数 c_n	输出是一个连续函数 $X(j\omega)$
像清单	像连续曲线

不要纠结积分怎么算。傅里叶变换的意义大于它的计算。就像你不需要知道引擎怎么造，也能开车一样。

4.4 还原本质：$X(j\omega)$ 到底长什么样？

通常用频谱图来表示——横轴是频率 ω，纵轴是”幅度”（这个频率的分量有多大)。

```
|X(j )|
    ^
    |
    |
    |
    |
    |
    +------------------>
```

低频成分多 -> 左边高高频成分多 -> 右边高
比如：- 低音提琴的声音 -> 低频部分高 - 小提琴的声音 -> 高频部分高 - 白噪音 -> 所有频率都有

4.5 逆傅里叶变换：从频域回到时域

如果傅里叶变换是”提取成分”，那逆变换就是”组装回去”：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

也就是说：把每个频率的分量加起来，就恢复了原始信号。
就像用完了棱镜，再把彩虹合回白光。

4.6 一句话记忆

> 傅里叶变换：打开信号，看它的”频率成分清单”——每个频率有多少，一清二楚。

0.3.6 5. 直观理解频域

5.1 时域和频域是什么关系？

你看到一个信号有两种方式：
时域：横轴是时间，看信号”怎么变”。频域：横轴是频率，看信号”有什么成分”。
同一个信号，两种看法。

5.2 类比：食谱 vs. 食材清单

想象你做一道菜（比如红烧肉)：
时域视角（食谱)：1. 切肉（第 0-5 分钟）2. 焯水（第 5-8 分钟）3. 炒糖色（第 8-12 分钟）4. 加料炖煮（第 12-60 分钟）5. 收汁（第 60-65 分钟）
这是过程的描述——随时间变化。
频域视角（食材清单)：- 五花肉 500g - 酱油 3 勺 - 冰糖 20g - 八角 2 颗 - 桂皮 1 段 - 料酒 2 勺

这是成分的描述——不管顺序，只管" 有什么"。

时域和频域，描述的是同一个东西，只是方式不同。

5.3 更形象的类比

场景	时域（随时间怎么变）	频域（有什么成分）
音乐	旋律随时间展开	音符的和弦构成
食物	菜谱步骤	食材清单
颜色	涂颜色的顺序	RGB 值
说话	一句话	你用到的词汇
照片	像素排列	颜色频率分布

5.4 转换的代价

时域和频域可以互相转换。但——完美的时域信息 = 完全不知道频域，反过来也一样。

想象一个信号：它只在瞬间有一个脉冲。在时域上看，它" 很清楚"（就在这里)。在频域上看，它包含所有频率（每个频率都有)。

反过来：一个纯正弦波（只有一个频率）-> 在时间上永远重复（没有时域定位)。

这就是量子力学中的不确定原理的数学根源！

> 信号不能同时在时域和频域上都被精确定位。

5.5 一句话记忆

> 时域 = "怎么做"，频域 = "用什么做"。同一盘菜，两种视角。

0.3.7 6. 为什么频域分析这么有用？

6.1 卷积很麻烦

在 Part 1 中我们讲过，LTI 系统的输出 = 输入和冲激响应的卷积：

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

积分里套着函数，还要翻转、移位... 手动算卷积很痛苦，直觉上也不好理解。

6.2 频域的魔法：卷积变乘法

这可能是信号与系统最有用的一个性质：

> 时域的卷积 = 频域的乘法

用数学写：

$$x(t) * h(t) \xrightarrow{\text{傅里叶变换}} X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

不信？这就是真的。

```
时域：x(t) -----> [卷积 * h(t)] -----> y(t)
                     v 傅里叶变换
频域：X(j ) -----> [乘以 H(j )] -----> Y(j )
```

这意味着什么？

- 在时域分析系统：要做复杂的卷积
- 在频域分析系统：只要做简单的乘法

这里乘一下就行了！不用积分了！

6.3 系统的”性格”：频率响应 $H(j\omega)$

$H(j\omega)$ 叫频率响应。它告诉系统对每个频率”是什么态度”。

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$$

两部分：- $|H(j\omega)|$ — 幅频响应：系统对每个频率的”放大倍数” - $\angle H(j\omega)$ — 相频响应：系统对每个频率的”时间延迟”

$H(j\omega)$ 就是系统的”个性签名”。每个系统都有自己独特的频率响应。

6.4 滤波器：系统对不同频率的”态度”

低通滤波器：让低频通过，阻止高频

```
|H(j )|
    ^
  1 |
    |
    |
    |
    +----------------------->
             ^截止频率
```

高通滤波器：让高频通过，阻止低频

```
|H(j )|
    ^
    |
    |
    |
    |
    +----------------------->
```

带通滤波器：只让某个范围的频率通过

```
|H(jω)|
    ^
    |
    |
    |
    |
    +------------------------------>
```

6.5 现实中的类比：筛子

低通滤波器 = 面粉筛 - 低频（小颗粒）-> 通过 - 高频（大颗粒）-> 被拦住

高通滤波器 = 只让大颗粒通过的筛子（反过来用）- 低频（小颗粒）-> 漏下去 - 高频（大颗粒）-> 留下来

带通滤波器 = 有特定大小孔洞的筛子 - 太小或太大 -> 过不去 - 正好合适的 -> 通过

6.6 现实中的应用

声音的 **EQ**（均衡器）：- 低音（低频）-> 让声音" 厚重" - 中音（中频）-> 让人声清晰 - 高音（高频）-> 让声音" 明亮"

EQ 就是调整不同频率的" 权重" — 本质上是在修改一个滤波器的频率响应。

图像处理：- 图像也可以做傅里叶变换（二维的）- 图像的" 低频" = 平滑区域（天空、皮肤）- 图像的" 高频" = 边缘、细节、噪点 - 低通滤波 -> 模糊（去掉细节）- 高通滤波 -> 边缘检测

通信系统：- 不同的电台使用不同的频率 - 你的收音机就是一个带通滤波器，调到哪个频率就" 打开" 哪个信号的通道 - 这就是频分复用（FDMA）的基础

6.7 一句话记忆

> 频域分析把人脑不擅长的卷积，变成了人脑擅长的乘法。滤波器就是" 频率筛子"。

0.3.8 7. 采样定理（直观版）

7.1 数字时代怎么存信号？

现实中的信号是连续的（模拟的）。但计算机只能处理离散的（数字的）。

要把模拟信号变成数字信号，我们得采样 — 每隔一段时间记录一个值。

问题来了：采多快才够？

```
原始连续信号：
~~~~~~~~~~~~~~~~

采样结果（太慢 —— 信息丢失）：
```

. . . .

采样结果（适中 —— 刚好）：
~.~.~.~.~.~.~.~.

采样结果（足够快 —— 完美）：
~~~~~~~~~~~~~~~~~~

7.2 采样定理（奈奎斯特定理）

香农和奈奎斯特告诉我们：

> **采样频率必须大于信号最高频率的 2 倍。**

$$f_s > 2f_{max}$$

其中：- f_s — 采样频率（每秒采多少个点）- f_{max} — 信号中的最高频率

如果满足这个条件，就可以从采样值完美恢复原始信号。

如果违反这个条件… 就会出问题。

7.3 如果采样太慢：混淆（Aliasing）

采样太慢会怎样？高频信号会伪装成低频信号。

最经典的例子：车轮倒转

想象你在看一辆车的轮子（假设轮子有辐条）。如果轮子转得很快，视频的采样率（比如每秒 24 帧）跟不上：

现实：轮子顺时针转，每秒转 10 圈采样：每秒只拍 24 张照片

结果：在视频里，轮子看起来在倒转！

为什么？因为采样频率不够，高频的旋转被” 混淆” 成了低频的。

这就是 **Aliasing**（混叠/混淆）。

7.4 更多 Aliasing 例子

老电影中的马车轮：- 车轮辐条看起来在倒转 - 甚至看起来不转了（当转速恰好是采样率的整数倍时）

莫尔条纹（**Moiré pattern**）：- 两张细密的网格叠加时，出现奇怪的大波纹 - 本质是空间域的”aliasing”

音频采样的混叠：- 录制高频声音时采样率不够 - 高频被” 折叠” 到可听范围，变成难听的噪音 - CD 的采样率是 44.1kHz——可以覆盖人耳能听到的最高频率（约 20kHz）的 2 倍以上

7.5 实际工程怎么处理？

实际系统中，采样前必须做一件事：

> **在采样之前，先用一个低通滤波器把高于 $f_s/2$ 的频率滤掉。**
~~~~~~~~~~~~~~~~~~

这个滤波器叫抗混叠滤波器（anti-aliasing filter）。

为什么？因为现实信号中总有各种高频噪声，不提前滤掉，采样后它们会" 伪装" 成低频信号混进来——而且混进来就无法去除了！

7.6 一句话记忆

> 采样像拍照：要想抓住快速变化的东西，快门必须够快。不然高频就会" 伪装" 成低频骗过你。

0.3.9 8. 傅里叶思想的局限

8.1 傅里叶变换不是万能的

傅里叶变换很强大，但它有个前提：

> 傅里叶变换假设信号是绝对可积的：$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

翻译成人话：信号的能量是有限的，不能无限增长。

但现实中有很多信号不是这样的：- e^{at}（当 $a > 0$，随时间越来越大的信号）- 持续增长的斜坡信号 - 不稳定系统的输出

8.2 什么是不稳定系统？

```
稳定的系统：
输入一个小扰动 -> 输出最终归于平静
（就像：推一下钟摆，它摆几下后停下来）

不稳定的系统：
输入一个小扰动 -> 输出越来越大
（就像：推一下多米诺骨牌，整排都倒了）
```

傅里叶变换分析不了不稳定系统，因为系统的响应增长到无穷大，没有有限的" 频谱"。

8.3 这时候需要拉普拉斯

拉普拉斯变换 = 傅里叶变换的" 增强版"。

它在 $e^{-j\omega t}$ 前面加了一个" 衰减因子" $e^{-\sigma t}$：

$$e^{-j\omega t} \to e^{-(\sigma + j\omega)t} = e^{-st}$$

这个 σ（衰减因子）就像一个" 镇定剂"，让那些增长过快的信号也能被分析。

> 傅里叶变换是拉普拉斯变换的一个特例（当 $\sigma = 0$ 时）。

8.4 一句话记忆

傅里叶只管”稳定”的信号，遇上”炸了”的系统，拉普拉斯来救场。

0.3.10 总结：Part 2 核心知识点卡片

```
+---------------------------------------------------------+
|                 Part 2 核心知识点卡片                     |
+---------------------------------------------------------+
|                                                         |
|   核心思想：复杂信号 = 简单正弦波的叠加                    |
|                                                         |
|  1. 为什么是正弦波？                                      |
|     -> LTI系统对正弦波的响应还是正弦波（只是幅度相位变了）    |
|                                                         |
|  2. 周期信号 -> 傅里叶级数                                |
|     -> 频率是离散的（基频 + 倍频）                         |
|     -> 方波 = sin(t) + sin(3t)/3 + sin(5t)/5 + ...      |
|                                                         |
|  3. 非周期信号 -> 傅里叶变换                              |
|     -> 频率是连续的                                      |
|     -> X(j ) 告诉"每个频率有多少"                         |
|                                                         |
|  4. 频域为什么有用？                                      |
|     -> 卷积变乘法（x(t)*h(t) <-> X(j )·H(j )）            |
|     -> 系统用 H(j ) 描述对不同频率的"态度"                  |
|     -> 滤波器 = 频率筛子                                  |
|                                                         |
|  5. 采样定理                                            |
|     -> fs > 2·fmax                                      |
|     -> 不够快 -> Aliasing（高频伪装成低频）                |
|                                                         |
|  6. 傅里叶的局限                                        |
|     -> 搞不定不稳定的系统                                  |
|     -> Part 3 用拉普拉斯来解决                            |
|                                                         |
+---------------------------------------------------------+
```

0.3.11 预备知识清单

在进入 Part 3 之前，确保你理解这些概念：

- ☐ 正弦波经过 LTI 系统后，频率不变（只变幅度和相位）
- ☐ 任何周期信号都能写成不同频率正弦波的叠加
- ☐ 傅里叶级数 = 周期信号的” 成分清单”
- ☐ 傅里叶变换 = 非周期信号的” 成分清单”
- ☐ 时域和频域是同一个信号的两种视角
- ☐ 时域的卷积 = 频域的乘法
- ☐ 低通/高通/带通各自的” 态度” 是什么
- ☐ 采样频率必须大于最高频率的 2 倍
- ☐ Aliasing 是啥，为啥要避免

0.3.12 Part 3 预告

> 傅里叶变换搞不定的，拉普拉斯来搞定。

Part 3 我们会看到：1. 傅里叶变换的局限 -> 为什么需要” 增强版” 2. 拉普拉斯变换：给信号加一个” 衰减因子” 3. 从频域到复频域：频率变成了复数 4. 用拉普拉斯分析系统：稳定性的终极判据 5. 零极点图：一眼看出系统的” 性格”

Part 3 标题：《推广的变换：拉普拉斯思想》

> 傅里叶让你看清信号的成分，拉普拉斯让你看清系统的本质。

0.4 Part 3：推广变换 —— 当傅里叶不够用时

> 核心问题：傅里叶变换搞不定的情况怎么办？如何分析系统的” 性格”（稳定性）？

0.4.1 0. 从 Part 2 的末尾说起

在 Part 2 里，我们学会了一个超级好用的思想：

> 任何信号都可以分解成不同频率的正弦波。

傅里叶变换给了我们一副” 频谱眼镜”。你可能会觉得：“太好了，所有问题都解决了！” 且慢。

试试用傅里叶变换分析这两个信号：

1. 衰减信号：$x(t) = e^{-2t}u(t)$
2. 增长信号：$x(t) = e^{2t}u(t)$

对于信号 1，傅里叶完美工作。但对于信号 2...傅里叶变换” 爆炸” 了——积分发散，结果不存在!

为什么会这样？我们又该怎么办？这就是 **Part 3** 要回答的问题。

0.4.2 1. 傅里叶变换的局限

问题：傅里叶变换是万能的吗？

回到傅里叶变换的定义：

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

它在说：把信号 $x(t)$ 乘以不同频率的旋转因子 $e^{-j\omega t}$，然后加起来（积分）。

问题是：$e^{-j\omega t}$ 的幅度永远是 1 （$|e^{-j\omega t}| = 1$）。它像一个” 振幅固定的搅拌器”——不管信号多大，力气都一样。如果信号在快速增长（比如 e^{2t}），积分就会越积越大，最后发散到无穷大。

核心思想：傅里叶的” 阿喀琉斯之踵”

傅里叶变换有三个” 搞不定” 的情况：

问题 **1**：增长信号 - $x(t) = e^{at}u(t)$ （$a > 0$），积分发散 -> 傅里叶变换不存在

问题 **2**：初始条件 - 打开开关，电路开始响应，起始时刻很关键 - 但傅里叶从 $-\infty$ 积分到 $+\infty$，“忘记” 了起始时刻 - 结论：不适合” 有起点” 的问题

问题 **3**：系统稳定性 - 傅里叶只能告诉你系统对不同频率的响应 - 但不能直接告诉你：这个系统会不会自爆？ - 结论：傅里叶看不到系统的” 性格”

直观理解：为什么需要新工具？

想象你在开车：傅里叶擅长分析” 稳定运行” 的状态，但不擅长分析” 刚开始” 和” 会不会出事” 的问题。

场景	傅里叶行	傅里叶不行
平坦路面（稳态）	分析振动频率	—
突然踩刹车（瞬态）	—	分析刹车后响应
方向盘抖动	—	判断车会不会翻

一句话记忆

> 傅里叶变换只适用于” 温和” 的信号（绝对可积），遇到增长信号或需要分析稳定性时，它就不够用了。

0.4.3 2. 核心思想：加一个”衰减因子”

问题：如何驯服发散的信号？

傅里叶变换的”搅拌器”$e^{-j\omega t}$ 幅度是 1，压不住快速增长信号。那...换个能压住的呢？

核心思想：先压住，再分解

> 既然信号增长太快，那就先乘一个快速衰减的指数，把它”按下去”，然后再做傅里叶变换。

具体来说：

1. 原始信号：$x(t)$
2. 乘以衰减因子：$x(t) \cdot e^{-\sigma t}$（$e^{-\sigma t}$ 快速衰减到 0）
3. 再做傅里叶变换：对”被压住”的信号做傅里叶

数学上，完整的公式就是：

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)e^{-\sigma t}\right] e^{-j\omega t} dt$$

整理一下：

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

恭喜，这就是拉普拉斯变换！

直观理解：用”重锤”压住气球

想象一个气球正在快速上升（增长信号）：

1. 傅里叶变换的做法：用手轻轻托住气球 -> 托不住，气球飞走了（积分发散）
2. 拉普拉斯变换的做法：用一个重锤压在气球上 -> 气球被按住了，可以慢慢分析

这个”重锤”就是 $e^{-\sigma t}$。

σ 越大，重锤越重，能压住的信号越多。但如果 σ 太大，连有用的信号都被压没了——所以选择合适的 σ 是一门艺术。

简化符号

为了书写方便，我们定义一个新的变量：

$$s = \sigma + j\omega$$

于是拉普拉斯变换变成：

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

这就是拉普拉斯变换的定义式。

其中 s 叫做”复频率”（complex frequency），因为它同时包含了：- 实部 σ：控制衰减或增长的速度 - 虚部 ω：控制振荡的频率

一句话记忆

> 拉普拉斯变换 = 先加衰减因子压住信号 + 再做傅里叶变换。它就比傅里叶多了”一个 σ“，但威力大了十倍。

0.4.4 3. s 域到底是什么？

问题：$s = \sigma + j\omega$ 是什么东西？

如果你之前没见过复数，可能会觉得 $s = \sigma + j\omega$ 很吓人。

别怕，我们把它拆开看：

核心思想：s 是”复频率”，同时描述增长/衰减和振荡

在 Part 2 中，我们用频率 ω 描述信号——它只告诉信号振荡得多快。

现在用 s，我们能同时描述两件事：- σ（实部）：信号是增长还是衰减？（增长多快？衰减多快？）- ω（虚部）：信号振荡得多快？

把两者合起来，就能描述各种复杂的信号行为：

信号行为	σ 取值	ω 取值	举例
纯衰减	负值	0	e^{-2t}
纯增长	正值	0	e^{3t}
等幅振荡	0	非零	$\cos(\omega t)$
衰减振荡	负值	非零	$e^{-2t}\cos(\omega t)$
增长振荡	正值	非零	$e^{2t}\cos(\omega t)$
常数	0	0	1

s 平面：信号的”地图”

把 s 画在一个平面上，就是 s 平面：

```
        Im(s) = j
            ^
            |
  II象限    |    I象限
 ( <0,  >0)|  ( >0,  >0)
            |
 <----------+----------> Re(s) =
```

```
            |
 III象限    |    IV象限
(<0, <0)|  (>0, <0)
            |
            v
```

这个平面上的位置，决定了信号的”命运”：

- 左半平面（$\sigma < 0$）：信号随时间衰减 -> 稳定
  - 越靠左，衰减越快
  - 例子：e^{-5t} 在 $\sigma = -5$
- 右半平面（$\sigma > 0$）：信号随时间增长 -> 不稳定
  - 越靠右，增长越快，越危险
  - 例子：e^{5t} 在 $\sigma = +5$
- 虚轴上（$\sigma = 0$）：信号等幅振荡 -> 临界稳定
  - 既不会衰减也不会增长
  - 例子：$\cos(\omega t)$ 在 $s = j\omega$

直观理解：s 平面 = “命运的罗盘”

想象一座山，从山顶往下滚石头：

```
            危险区（右半平面）
           石头越滚越快 /
                       ^
    <- 安全区（左半平面）-> 危险区（右半平面）
      石头慢慢停        \ 石头越滚越快
```

- 左半平面 = 山谷（任何扰动都会平息）
- 右半平面 = 山顶（任何扰动都会被放大）
- 虚轴 = 平地（扰动既不放大也不缩小）

从另一个角度看：s 的”食谱”

每种基本信号在 s 域都有对应的”配方”：

时域信号	s 域表示	在 s 平面的位置
$\delta(t)$（冲激）	1	处处存在
$u(t)$（阶跃）	$\frac{1}{s}$	s=0 处有个" 极点"
$e^{-at}u(t)$（衰减）	$\frac{1}{s+a}$	s=-a 处有个" 极点"
$\sin(\omega_0 t)u(t)$（振荡）	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	s=±j　处有极点

可以看到，每种基本信号的" 特征" 都对应 s 平面上的某个特殊位置。这些特殊位置叫做" 极点"——我们后面会详细讲。

一句话记忆

> s 平面是一张" 命运的罗盘"：左半平面代表稳定（衰减），右半平面代表不稳定（增长），虚轴上代表临界（等幅振荡）。

0.4.5 4. 为什么说拉普拉斯变换" 把微分变乘法"？

问题：解微分方程为什么这么痛苦？

在信号与系统中，系统通常用微分方程描述。

比如一个 RC 电路：

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

(输入 $x(t)$，输出 $y(t)$)

要解这个方程，你需要：1. 解齐次解（自然响应）2. 找特解（强制响应）3. 代入初始条件确定常数

这就像在做手工——每一步都需要技巧，容易出错，而且每换一个输入就要重新算一遍。

核心思想：变换域 ＝ "计算的快捷键"

拉普拉斯变换最强大的地方在于这几个变换规则：

时域操作	s 域操作
微分 $\frac{dx}{dt}$	$sX(s) - x(0)$
二阶微分 $\frac{d^2x}{dt^2}$	$s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$
积分 $\int x(t)dt$	$\frac{X(s)}{s}$
卷积 $x(t) * h(t)$	$X(s) \cdot H(s)$

看到了吗？ - 时域的微分 -> s 域的乘法（乘以 s） - 时域的卷积 -> s 域的乘法（乘以 H(s)） - 时域的积分 -> s 域的除法（除以 s）

微积分运算 -> 变成了代数运算！

直观理解：用计算器代替心算

想象你手算 123×456：

- 手工（时域）：$123 \times 400 + 123 \times 50 + 123 \times 6$，需要进位、对齐...很麻烦
- 计算器（s 域）：按几个键，结果就出来了

拉普拉斯变换就是这个" 计算器"——它把繁琐的微分方程变成了简单的代数方程。更妙的是，初始条件（$x(0)$、$x'(0)$ 等）自动被包含进去了，不需要额外处理。

看一个具体例子：RC 电路

时域的微分方程：

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

对两边做拉普拉斯变换：

$$RC[sY(s) - y(0)] + Y(s) = X(s)$$

整理：

$$(RCs + 1)Y(s) - RC \cdot y(0) = X(s)$$

$$Y(s) = \frac{X(s)}{RCs + 1} + \frac{RC \cdot y(0)}{RCs + 1}$$

左边是输入的影响，右边是初始条件的影响——分得清清楚楚，明明白白！

一句话记忆

> 拉普拉斯变换把" 难搞的微分方程" 变成了" 简单的代数方程"——微积分变乘法，这就是它最强大的地方。

0.4.6 5. 系统函数 $H(s)$ 和稳定性

问题：如何一眼看出系统会不会" 自爆"？

回到 Part 2，我们学到一个重要的概念——频率响应 $H(j\omega)$：

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

它告诉系统对不同频率的输入会怎么响应。

但问题来了：$H(j\omega)$ 只告诉你”稳定运行时”的情况。

如果系统本身不稳定——给它一个小小扰动它就爆炸——$H(j\omega)$ 是看不出来的。

怎么办？

核心思想：用 $H(s)$ 看系统的”基因”

在 s 域，同样有系统函数：

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$H(s)$ 包含了系统的全部信息——不仅包括稳定状态，还包括系统的”内在性格”。

$H(s)$ 的构成

任何实际系统的 $H(s)$ 都可以写成两个多项式相除的形式：

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

比如一个二阶系统：

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

极点：系统的”性格基因”

极点就是让分母 $D(s) = 0$ 的那些 s 值。

比如 $H(s) = \frac{1}{s+2}$，分母 $s + 2 = 0$，所以极点在 $s = -2$。

$H(s) = \frac{1}{s^2+2s+5}$，解 $s^2 + 2s + 5 = 0$，得到 $s = -1 \pm 2j$，所以两个极点分别在 $-1 + 2j$ 和 $-1 - 2j$。

极点的位置决定稳定性

这是整个信号与系统最重要的结论之一：

```
极点全部在左半平面 -> 稳定
有任何极点在右半平面 -> 不稳定
极点恰好在虚轴上 -> 临界稳定
```

三个例子感受一下：

系统	极点位置	冲击响应	结论
$H(s) = \frac{1}{s+5}$	$s = -5$（左半平面）	$e^{-5t}u(t)$ 衰减到 0	稳定
$H(s) = \frac{1}{s-3}$	$s = 3$（右半平面）	$e^{3t}u(t)$ 爆炸	不稳定
$H(s) = \frac{1}{s^2+4}$	$s = \pm 2j$（虚轴）	$\sin(2t)u(t)$ 等幅振荡	临界稳定

直观理解：极点是系统的”按钮”

想象一个音响系统：

- 左半平面的极点 = 音响的”降噪按钮”
  - 按一下，声音逐渐消失 -> 系统恢复平静
  - 越靠左，消失得越快
- 右半平面的极点 = 音响的”啸叫按钮”
  - 按一下，声音越来越大 -> 系统自激振荡（就像麦克风靠近喇叭时那种刺耳的声音）
  - 越靠右，啸叫来得越快
- 虚轴上的极点 = 音响的”循环播放按钮”
  - 按一下，就一直唱下去，不会停

所以看系统是否稳定，就是在 s 平面上找极点——只要有一个极点在右半平面，系统就会”啸叫”（不稳定）。

零点和极点一起看

除了极点，$H(s)$ 的分子 $N(s) = 0$ 的解叫做零点。

- 零点：让 $H(s) = 0$ 的 s 值
- 极点：让 $H(s) \to \infty$（趋向无穷大）的 s 值

在 s 平面上，通常用 $\circ$ 表示零点，用 $\times$ 表示极点：

```
       j
       ^
   ×   |   ×    （虚轴上的两个极点 -> 临界稳定）
       |
 ------+------->
       |
       |

       j
       ^
       |
 ------+------->
  ×    |     （左半平面有一个极点 -> 稳定）
       |
       |
```

如果一个系统的极点在右半平面，工程师会说：“这个系统有右半平面极点，不稳定，需要加反馈补偿。”

一句话记忆

> 系统的稳定性完全由极点在 s 平面的位置决定：左半平面 = 稳定，右半平面 = 不稳定，虚轴 = 临界。看极点位置，就知道系统会不会" 自爆"。

0.4.7 6. s 域 vs 频域：两张" 地图" 的关系

问题：$H(s)$ 和 $H(j\omega)$ 是什么关系？

如果你已经熟悉了 Part 2 中 $H(j\omega)$ (频率响应) 的概念，现在又来了个 $H(s)$，你可能想问：这两个东西到底是什么关系？是不是有两个不同的系统函数？

核心思想：$H(s)$ 是完整的" 地图"，$H(j\omega)$ 是其中一条" 路"

答案很简洁：

> $H(s)$ 是更一般的系统函数。当 s 沿着虚轴走（即 $s = j\omega$），$H(s)$ 就变成了 $H(j\omega)$。

换句话说：

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$$

频域只是 s 域的一个" 截面"。

直观理解：看一栋楼 vs 看一层楼

- $H(s)$（s 域） = 整栋楼的建筑图纸（完整的结构信息）
- $H(j\omega)$（频域） = 其中某一层的平面图（只看某一层的结构）

当你只关心" 稳态频率响应" 时，你只需要看 $H(j\omega)$ (只看一层)。但当你需要了解系统的全部行为（包括稳定性、瞬态响应），你就需要看完整的 $H(s)$。

```
s平面视角：
                    j
                    ^
                    |   <- 这条路径就是 s = j （频域）
   完整系统信息 <----+---->
     （全平面）      |
                    |

只看虚轴 -> 频率响应 H(j )
看整个平面 -> 完整系统函数 H(s)
```

什么时候用哪个？

场景	用哪个	原因
分析系统的频率响应（如设计均衡器）	$H(j\omega)$	需要知道不同频率的增益/衰减
分析系统稳定性	$H(s)$	需要看极点位置
分析系统对初始条件的响应	$H(s)$	s 域自动包含初始条件
分析系统的瞬态行为	$H(s)$	需要完整的时间响应
设计滤波器	$H(j\omega)$	主要关心不同频率的通过/阻隔

一个具体例子

考虑系统 $H(s) = \frac{1}{s+1}$：

从 s 域看： - 极点在 $s = -1$（左半平面）- 结论：系统稳定

从频域看（取 $s = j\omega$）：

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

- 低频时（$\omega \approx 0$）：$H(j\omega) \approx 1$ -> 信号通过 - 高频时（$\omega \to \infty$）：$H(j\omega) \to 0$ -> 信号被衰减 - 结论：这是一个低通滤波器

两者结合：系统既是稳定的，又对高频有衰减作用——完整的图像！

一句话记忆

> $H(s)$ 是完整的系统画像（包括性格和历史），$H(j\omega)$ 是它的”身份证照片”（只看稳态响应）。频域 = s 域在虚轴上的投影。

0.4.8 7. 实际应用：电路分析

问题：为什么电路分析这么烦？

如果你学过电路分析，一定被电容、电感的微分方程折磨过：

- 电容：$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$
- 电感：$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$

每个元件都有自己的微分关系，一个稍微复杂的电路就要解一堆微分方程。
但在 s 域里，这一切都变得简单得不可思议。

核心思想：在 s 域，电容和电感变成” 电阻”

来看一个神奇的变换：

电容的 s 域模型：
时域：$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$
s 域：$I(s) = C \cdot sV(s)$
整理为：$\frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}$
在 s 域，电容就像一个电阻，阻值是 $\frac{1}{sC}$！
电感的 s 域模型：
时域：$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$
s 域：$V(s) = L \cdot sI(s)$
整理为：$\frac{V(s)}{I(s)} = sL$
在 s 域，电感也像一个电阻，阻值是 sL！

直观理解：s 域把电路变成了” 电阻网络”

元件	时域关系	s 域阻抗
电阻	$v = iR$	$Z_R = R$
电容	$i = C\frac{dv}{dt}$	$Z_C = \frac{1}{sC}$
电感	$v = L\frac{di}{dt}$	$Z_L = sL$

看到了吗？在 s 域里面，所有元件都变成了” 广义电阻”。

这意味着：1. 你可以像分析电阻网络一样分析任何电路 2. 串联就加，并联就用倒数加 3. 分压公式、分流公式全部照用 4. 不需要解微分方程！

举例：RC 电路

一个简单的 RC 低通滤波器：

```
    R
Vin---/\/\/\---+--- Vout
               |
               C
               |
              GND
```

在 s 域，电容变成阻抗 $Z_C = \frac{1}{sC}$，电阻还是 R。
这是一个分压电路：

$$V_{out}(s) = V_{in}(s) \cdot \frac{Z_C}{R + Z_C} = V_{in}(s) \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

整理：

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

这就是 **RC** 电路的传递函数！

从这个 $H(s)$ 我们可以立刻知道：1. 极点：$s = -\frac{1}{RC}$（左半平面 -> 稳定）2. 频率响应：$H(j\omega) = \frac{1}{RC\cdot j\omega+1}$（低通滤波）3. 截止频率：$\omega_c = \frac{1}{RC}$

不用解微分方程，不需要复杂的计算，一个分压公式就搞定了！

再举一个：RLC 电路

s 域阻抗串联：$Z = R + sL + \frac{1}{sC}$，分压得：

$$H(s) = \frac{1/(sC)}{R + sL + 1/(sC)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

从分母（特征方程）就能看出系统可能的振荡行为。二阶电路在 s 域里依然是简单的代数运算。

一句话记忆

> 在 s 域里，电容和电感变成了”广义电阻”——微积分变除法/乘法，电路分析变成了电阻网络分析。

0.4.9 8. 回顾与地图：拉普拉斯思想全景

一条线索串起来

让我们回顾整个 Part 3 的逻辑链：

```
傅里叶变换不够用
   v
有的信号增长太快（积分发散）
   v
加一个衰减因子 e^{- t} 把信号"压住"
   v
s =   + j  诞生了（复频率）
   v
拉普拉斯变换 X(s) =   x(t)e^{-st}dt
   v
微分 -> 乘法（把微分方程变代数方程）
   v
系统函数 H(s) = Y(s)/X(s)
   v
极点的位置决定稳定性
   v
s域可以分析：稳定性 + 瞬态 + 稳态
```

ASCII 知识地图

```
+-------------------------------------------------------------------+
|              信号与系统思想地图 • Part 3                          |
|                    拉普拉斯变换                                   |
+-------------------------------------------------------------------+
|                                                                   |
|  时域 (t)              s域 (s =  + j )                         |
|  ---------             -------------------                        |
|                                                                   |
|  微分方程              代数方程                                   |
|  +------+              +------+                                  |
|  |麻烦! |--拉普拉斯---> |简单! |                                  |
|  +------+   变换       +------+                                  |
|     ^                    |                                       |
|     |                    |                                       |
|  卷 积                 乘 法                                     |
|  x(t)*h(t)             X(s)•H(s)                                 |
|     ^                    |                                       |
|     |                    |                                       |
|  初始条件              自动包含                                   |
|  (手动处理)            (自动处理)                                 |
|                                                                   |
|                    s平面位置说一切                                |
|                    +--------------------+                        |
|                    |  极点 ×            |                        |
|                    |                    |                        |
|                    |  稳定 <- 左 | 右 -> 不稳定                   |
|                    |                    |                        |
|                    |  临界 <- 虚轴 -> 临界                         |
|                    +--------------------+                        |
|                                                                   |
|              电路 <- s域阻抗 (Z_C=1/sC, Z_L=sL)                  |
|                                                                   |
+-------------------------------------------------------------------+
|  关键结论:极点的位置 -> 系统的命运                               |
|  "左稳右不稳,虚轴临界"                                           |
+-------------------------------------------------------------------+
```

0.4.10 9. 一句话总结全章

拉普拉斯变换 = 傅里叶变换 + 衰减因子。它用 s 域（复频率）把微分方程变成代数方程，用极点位置判断系统稳定性。核心口诀：左稳右不稳，虚轴临界。

0.4.11 Part 4 预告：数字世界

我们已经学会了：- Part 2：用傅里叶把连续信号分解成频率成分（频域分析）- Part 3：用拉普拉斯分析系统的稳定性和瞬态行为（s 域分析）

但你有没有想过一个问题：

计算机是数字的，只能处理 **0** 和 **1** 的序列。而我们的信号是连续的（模拟信号）。

计算机怎么分析信号？

计算机不能做积分，计算机不能解微分方程，计算机只能做加法、减法和存储。

所以我们需要一个”数字版本”的傅里叶和拉普拉斯——这就是 **Part 4** 的主题。

在 Part 4 中，我们将看到：1. 如何把连续信号变成数字序列（采样）2. 计算机怎么”模拟”微积分（差分方程）3. 数字版本的拉普拉斯——**Z** 变换 4. 离散傅里叶变换（DFT）和快速傅里叶变换（FFT）

敬请期待 **Part 4：**离散世界——计算机如何处理信号？

0.5 Part 4：离散世界 — 计算机怎么处理信号？

核心问题：计算机/数字芯片只能处理离散的数据，怎么用数字方式处理信号？

0.5.1 开篇：两个世界的桥梁

到目前为止，我们的故事都在连续世界发生：

- 信号是 $x(t)$ — 每时每刻都有值
- 系统用微分方程描述
- 我们用拉普拉斯变换把微分方程变成代数方程

但是——

打开你的手机。它正在做信号处理：

- 播放音乐（把数字变成声音）
- 打电话（把你的声音变成数字传输）
- 拍照（把光信号变成像素数字）

手机里的芯片能处理 $x(t)$ 吗？

不能。芯片只懂数字：0 和 1。它只能处理一串串的数字。

这就带来了一个根本问题：

> 怎么在离散的数字世界里，做和连续世界一样的事情？

Part 4 就是回答这个问题的。

0.5.2 1. 为什么需要离散信号？

问题：计算机能直接处理连续信号吗？

想象你在用手机录音：

```
你的声音（连续声波）
    v
麦克风（变成连续电信号）
    v
计算机芯片 <- 停！
```

计算机芯片看着这个连续电信号，完全不知道怎么办。
它说："你给我一个曲线，但我只能存数字。你让我存什么？"
这就是最原始的矛盾：

- 物理世界是连续的（声音、光、温度都在连续变化）
- 数字世界是离散的（只能存一串数字）

核心思想

> 离散信号 = 把"连续曲线"变成"一串数字"

直观理解：拍照 vs 录像

- 连续信号 = 录像。每一瞬间都有画面
- 离散信号 = 每隔 1 秒拍一张照片。它丢失了照片之间的信息，但更方便存储和处理

```
录像（连续）      : ----------------------
照片串（离散）    :
                   ^   ^   ^   ^   ^   ^
                   每隔1秒拍一张
```

现实场景

你手机里的所有信号处理，都是离散的：

场景	连续世界	离散世界（数字芯片）
录音	声波（空气振动）	一串数字（每秒 44100 个）

场景	连续世界	离散世界（数字芯片）
拍照	光（连续电磁波）	像素阵列（例如 4000×3000）
视频	连续运动	每秒 24/30/60 帧
导航	连续位置变化	每隔 1 秒记录一次 GPS 坐标

一句话记忆

离散信号不是”残缺的连续信号”，而是一种新的、数字世界自己的语言。

0.5.3 2. 采样：从连续到离散的桥梁

问题：怎么把连续信号变成一串数字？

我们现在面临一个实际的问题：
有一个连续信号 $x(t)$，怎么让计算机存下它？

```
x(t)
   /\            /\
  /  \/\        /  \/\
/        \/\/         \---
----------------------------> t
```

计算机说："我不能存一整条曲线，你每隔一段时间给我一个点，我记下来。"
这就是采样（**sampling**）。

核心思想

采样 $=$ 每隔 T_s 秒，取一个值

直观理解：读取体温

假设你发烧了，医生让你每 2 小时量一次体温：

```
时间  : 0点  2点  4点  6点  8点  10点
体温  : 37.2 37.8 38.5 39.1 38.8 38.0
```

- T_s（采样周期） $= 2$ 小时（每隔多久量一次）
- f_s（采样频率） $= 0.5$ 次/小时（每小时量 0.5 次）

注意：$f_s = 1/T_s$，它们是倒数关系。
这两个参数就是采样的”节奏”：- 采样周期 T_s：相邻两个点之间的时间间隔 - 采样频率 f_s：每秒（或每单位时间）取多少个点

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

真实世界：CD 音质

CD 音质的采样频率是 $f_s = 44100$ Hz。

这意味着：每秒取 **44100** 个点。

```
1秒的声音
+------+------+------+------+------+------+

44100个点！
```

为什么是 44100？因为人耳能听到的最高频率大约是 20000 Hz，根据我们马上要学的理论，采样频率必须 最高频率的 2 倍。$44100 > 40000$，足够了。

采样过程的三个步骤

```
连续信号 x(t)
    v
 每隔 T_s 秒"咔嚓"一下（像拍照一样）
    v
 取那个时刻的值
    v
 得到一串数字：x[0], x[1], x[2], x[3], ...
```

数学表示：

$$x[n] = x(nT_s)$$

意思是：离散信号的第 n 个点 = 连续信号在 nT_s 时刻的值。

一句话记忆

> 采样就是给连续信号”拍照”，每隔 T_s 秒拍一张，得到一串数字。

0.5.4 3. 奈奎斯特采样定理（直观版）

问题：采样多快才够？

采样会丢失信息 — 这是肯定的。两个采样点之间发生了什么，我们永远不知道。

但问题是：如果采样太慢，我们会彻底误解信号。

核心思想

> 采样频率必须 信号中最高频率的 **2** 倍。

公式：

$$f_s \geq 2f_{\max}$$

这里的 $f_{\max}$ 是信号中包含的最高频率。

这个"2 倍" 频率称为奈奎斯特频率（Nyquist frequency）:

$$f_{\text{Nyquist}} = \frac{f_s}{2}$$

直观理解：看得够快才能看清

想象一个小朋友在转圈：

- 转得慢（低频）：你每秒看 10 次，每次都能看清他在哪个位置
- 转得快（高频）：你每秒还是看 10 次，可能每次都看到他出现在不同的位置，根本看不清他在转

```
小朋友转圈（低频，每秒转1圈）
你看的频率：每秒10次
结果：每次都能看清位置

小朋友转圈（高频，每秒转10圈）
你看的频率：每秒10次
结果：每次都看到他在不同位置，完全混乱
```

要看清一个每秒转 10 圈的小朋友，你的" 看" 速度至少需要每秒 20 次。

这就是"2 倍" 的直觉来源：- 一个正弦波有波峰和波谷 - 要确定一个正弦波的频率，至少需要在波峰采一个点，在波谷采一个点 - 这就是每个周期至少 2 个点

```
正确采样（每秒2个点以上）：
/\      /\
/  \/  \/  \
               <- 每个波峰和波谷都能采到

采样太慢（每秒不到2个点）：
/\          /\
/  \        /  \
               <- 完全看不出波形！
```

混叠（Aliasing）：采样太慢的后果

当采样频率低于 2 倍最高频率时，高频信号会" 伪装" 成低频信号。这叫混叠（**aliasing**）。

经典例子：马车轮子倒转 西部电影里，马车轮子有时候看起来在倒转。

原因：- 电影的帧率是每秒 24 帧（相当于采样频率 24 Hz）- 车轮的辐条转得很快（高频）- 每帧之间，辐条转动了差不多一整圈，看起来就像在倒转

```
实际车轮：顺时针快速转动
帧1：辐条在12点方向
帧2：辐条在11点方向（已经转了一圈多一点点）
你看起来：辐条逆时针动了一下 -> 轮子在倒转！
```

这就是混叠：高频的运动被”伪装”成了低频的运动。

抗混叠滤波器 在实际录音中，录音设备会先做一个操作：

> 在采样之前，用低通滤波器滤掉所有高于 $f_s/2$ 的频率成分。

这样就能保证采样后的信号不会出现混叠。

```
原始声音信号
    v
低通滤波器（切掉高于 f_s/2 的部分）
    v
采样器（现在可以放心采样了）
    v
一串数字
```

一句话记忆

> 采样频率必须 最高频率的 2 倍，否则高频信号会”伪装”成低频信号（混叠）。

0.5.5 4. 从微分方程到差分方程

问题：离散世界怎么描述系统的”变化”？

在连续世界，我们用微分方程来描述系统的行为：

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$\frac{dy}{dt}$ 表示”在某一瞬间的变化率”。
但在离散世界，没有”瞬间”这个概念。只有一个个孤立的点：$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
相邻两个点之间，什么都没有。
那离散世界怎么表示”变化”？

核心思想

> 差分 = 离散世界的”导数”差分方程 = 离散世界的”微分方程”

直观理解：导数 vs 差分

连续世界（导数）：

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

“看一个无穷小时间内的变化率”——这需要极限，需要微积分。
离散世界（差分）：

$$y[n] - y[n-1]$$

“看相邻两个点之间的差值”——这只需要减法！

```
连续导数：看无穷小的变化率（需要微积分）
dy/dt   lim(Δt->0) [y(t+Δt) - y(t)] / Δt

离散差分：看相邻点的差值（只需要减法）
Δy[n] = y[n] - y[n-1]
```

三种常用差分

一阶前向差分：

$$\Delta y[n] = y[n+1] - y[n]$$

一阶后向差分（最常用）：

$$\nabla y[n] = y[n] - y[n-1]$$

二阶差分（对一阶差分再做差分）：

$$\nabla^2 y[n] = y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]$$

具体例子：从微分到差分的转换

连续世界的微分方程：

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

转换成离散世界：

$$\frac{y[n] - y[n-1]}{T_s} + 2y[n] = x[n]$$

整理一下：

$$y[n] - y[n-1] + 2T_s y[n] = T_s x[n]$$

这就是一个差分方程。

```
连续世界：           离散世界：
微分方程      --->    差分方程
  v                   v
需要微积分            只需要加减乘除
  v                   v
适合理论分析          适合计算机实现
```

为什么差分方程如此重要？

计算机可以逐点计算差分方程。

假设我们有差分方程：

$$y[n] = x[n] + 0.5y[n-1]$$

计算机这样执行:

```
已知：x[0], x[1], x[2], ...（输入信号）
假设：y[-1] = 0（初始条件）

计算：
y[0] = x[0] + 0.5 × 0      = x[0]
y[1] = x[1] + 0.5 × y[0]   = x[1] + 0.5x[0]
y[2] = x[2] + 0.5 × y[1]   = x[2] + 0.5(x[1] + 0.5x[0])
...

每一步只需要：一次乘法 + 一次加法
计算机飞快地做下去...
```

这就是数字滤波器的本质！你的手机、电脑里的数字音频处理，底层都是这样的差分方程计算。

一句话记忆

> 差分是离散世界的”导数”，差分方程是离散世界的”微分方程”——把微分变成减法，计算机就能算了。

0.5.6 5. Z 变换：离散世界的”拉普拉斯变换”

问题：离散世界有类似拉普拉斯的工具吗？

回顾连续世界的故事:

```
微分方程（难解）
    v
拉普拉斯变换（两边取变换）
    v
代数方程（好解！）
    v
解代数方程
    v
拉普拉斯反变换
    v
得到答案
```

拉普拉斯变换的魔法：把微积分运算变成乘除法。

那离散世界呢?

我们有差分方程。差分方程虽然没有微积分，但涉及过去的值（比如 $y[n-1], y[n-2]$），也不是直接能解的。

能不能有一个类似拉普拉斯的东西，把”延迟”变成乘法？
能！就是 Z 变换。

核心思想

Z 变换 = 离散版的拉普拉斯变换

直观理解：为什么叫”Z”？

先回顾拉普拉斯变换：

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

当我们对采样后的信号做拉普拉斯变换，奇妙的事情发生了…
采样信号：$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s)$
做拉普拉斯变换：

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-snT_s}$$

令 $z = e^{sT_s}$，得到：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

这就是 Z 变换！

```
拉普拉斯 -> Z变换的推导
----------------------
采样信号 x_s(t) = Σ x[n] (t - nT_s)
         v 拉普拉斯变换
X_s(s) = Σ x[n]e^{-snT_s}
         v 令 z = e^{sT_s}
X(z) = Σ x[n]z^{-n}      <- Z变换!
```

Z 变换的公式

双边 Z 变换（也是最常用的形式）：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

其中 z 是一个复数，可以写成极坐标形式：

$$z = re^{j\Omega}$$

- $r = |z|$：到原点的距离
- Ω：角度（离散角频率）

Z 变换最核心的性质：延迟性质

这是 Z 变换最有用的地方：

$$x[n-1] \longleftrightarrow z^{-1}X(z)$$

延迟一个时间单位，在 **Z** 域就是乘 z^{-1}。
这就像拉普拉斯变换中，微分一次变成乘 s。

```
连续世界：              离散世界：
d/dt           --->    延迟一个单位
  v                      v
乘 s                   乘 z^{-1}
```

例子：用 Z 变换解差分方程

差分方程：

$$y[n] - 0.5y[n-1] = x[n]$$

两边做 Z 变换（利用延迟性质）：

$$Y(z) - 0.5z^{-1}Y(z) = X(z)$$

整理：

$$Y(z)(1 - 0.5z^{-1}) = X(z)$$

得到系统函数：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

看！差分方程真的变成了代数方程！

```
差分方程 y[n] - 0.5y[n-1] = x[n]
     v 两边取Z变换
Y(z) - 0.5z^{-1}Y(z) = X(z)
     v 整理
H(z) = Y(z)/X(z) = 1/(1 - 0.5z^{-1})
     v 有了H(z)就可以分析系统特性了！
```

s 平面 -> z 平面的映射

$z = e^{sT_s}$ 这个关系，把连续世界的 s 平面映射到了离散世界的 z 平面。
这是最核心的映射关系：

s 平面（连续）	->	z 平面（离散）
$s = 0$	->	$z = 1$
$s = j\omega$（虚轴）	->	$lvertzvert = 1$（单位圆）

s 平面（连续）	->	z 平面（离散）
$\sigma < 0$（左半平面）	->	$lvertzvert < 1$（单位圆内）
$\sigma > 0$（右半平面）	->	$lvertzvert > 1$（单位圆外）

一句话记忆

Z 变换是离散版的拉普拉斯变换：延迟 -> 乘 z^{-1}，差分方程 -> 代数方程。

0.5.7 6. z 平面分析（直观版）

问题：怎么判断一个离散系统是否稳定？

回忆连续世界：

- 拉普拉斯变换的极点 = 系统的" 固有频率"
- 极点在左半平面 -> 系统稳定
- 极点在右半平面 -> 系统不稳定
- 虚轴（$j\omega$）是稳定和 instability 的分界线

离散世界呢？分界线在哪？

核心思想

离散系统的稳定性看极点是否在单位圆内。

直观理解：单位圆 = 离散世界的" 虚轴"

通过 $z = e^{sT_s}$ 这个映射：

```
s平面（连续）                    z平面（离散）
    j                              Im
    ^                              ^
    |                              |
    |                              |
----+----->               --------+--------> Re
    |                          /   |    \
    |                         / 单位圆 \
    |                        /   |z|=1  \

虚轴 j   ----------->  单位圆 |z|=1
左半平面  ----------->  单位圆内部 |z|<1
右半平面  ----------->  单位圆外部 |z|>1
```

- 单位圆（$|z| = 1$）：稳定和不稳定的分界线
- 单位圆内（$|z| < 1$）：稳定区域
- 单位圆外（$|z| > 1$）：不稳定区域

稳定性判断

步骤：1. 写出系统函数 $H(z)$ 2. 找出极点（分母 $= 0$ 的根）3. 检查所有极点的模长 $|z|$ 是否 < 1

例子：

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

分母为零：$1 - 0.5z^{-1} = 0$，即 $z = 0.5$

$|0.5| < 1$ -> 极点在单位圆内 -> 稳定！

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$$

分母为零：$1 - 2z^{-1} = 0$，即 $z = 2$

$|2| > 1$ -> 极点在单位圆外 -> 不稳定！

```
z平面图示：

稳定系统 (H(z) = 1/(1-0.5z^{-1})):
         Im
          ^
          |
    /---+---\
   /    |    \
  /     |     \
  |     |     |     <- 极点在 z=0.5，在单位圆内
  \     |     /
   \    |    /
    \---+---/
          -------> Re

不稳定系统 (H(z) = 1/(1-2z^{-1})):
         Im
          ^
          |
    /---+---\
   /    |    \
  /     |     \
```

```
  |     |     |
  \     |     /
   \    |    /
    \---+---/
        |
        |    <- 极点在 z=2，在单位圆外
        -------> Re
```

离散频率响应：沿单位圆走一圈

在连续世界，频率响应是 $H(j\omega)$ — 即拉普拉斯变换沿虚轴取值。

在离散世界，频率响应是 $H(e^{j\Omega})$ — 即 Z 变换沿单位圆取值。

$$H(e^{j\Omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$$

当 Ω 从 0 走到 2π，我们沿着单位圆走了一圈，得到了系统对所有频率的响应。

```
沿单位圆走一圈 = 扫过所有频率

Ω = 0     -> z = 1          -> 直流响应
Ω =  /2   -> z = j          -> 中频响应
Ω =       -> z = -1         -> 最高频响应（奈奎斯特频率）
Ω = 2     -> 回到 z = 1     -> 和 Ω = 0 相同（周期性！）
```

离散频率 Ω 和连续频率 ω 的关系：

$$\Omega = \omega T_s$$

- Ω 的单位是弧度/采样点
- Ω 的范围：0 到 π（对应 0 到 $f_s/2$）

一句话记忆

离散系统的稳定看极点是否在单位圆内；频率响应就是沿单位圆走一圈。

0.5.8 7. 连续 vs 离散对照表（核心！）

这是 Part 4 最重要的部分。把两个世界的概念一一对应起来。

基本概念对应

概念	连续世界	离散世界
信号	$x(t)$（圆括号）	$x[n]$（方括号）
自变量	t 时间（连续）	n 序号（整数）
基本运算	微分 $\frac{d}{dt}$	差分 ∇
系统描述	微分方程	差分方程
延迟	无直接对应	$x[n-1]$（核心运算!）

变换对应

概念	连续世界	离散世界
变换类型	拉普拉斯变换	Z 变换
公式	$X(s) = \int x(t)e^{-st}dt$	$X(z) = \sum x[n]z^{-n}$
核心性质	微分 -> 乘 s	延迟 -> 乘 z^{-1}
复变量	$s = \sigma + j\omega$	$z = re^{j\Omega}$
两者关系	—	$z = e^{sT_s}$

稳定性对应

概念	连续世界	离散世界
稳定边界	虚轴 $j\omega$	单位圆 $\|z\| = 1$
稳定区域	左半平面（$\sigma < 0$）	单位圆内（$\|z\| < 1$）
不稳定区域	右半平面（$\sigma > 0$）	单位圆外（$\|z\| > 1$）

频率响应对应

概念	连续世界	离散世界
频率响应	$H(j\omega)$	$H(e^{j\Omega})$
取值路径	沿虚轴 $s = j\omega$	沿单位圆 $z = e^{j\Omega}$
频率范围	0 到 ∞	0 到 π（对应 $f_s/2$）

0.5.9 8. 离散世界的"信号处理三件套"

重温 Part 1 的"信号与系统三件套"，现在看看离散世界的版本：

信号分解（离散版）

在连续世界，我们把信号分解成不同频率的正弦波。

在离散世界，同样的思想，但用的是离散频率：

$$x[n] = \sum_{k} A_k \cos(\Omega_k n + \phi_k)$$

计算机可以做离散傅里叶变换（**DFT**）来分解信号。

```
连续傅里叶：      分解成 e^{j t}（无穷多个频率）
离散傅里叶：      分解成 e^{jΩn}（有限个频率）

计算机真正执行的是 FFT（快速傅里叶变换）
FFT = 一种超级快速的离散傅里叶算法
```

系统描述（离散版）

方式	描述
差分方程	$y[n] + a_1 y[n-1] + ... = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + ...$
系统函数	$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$
冲激响应	$h[n]$（输入为单位冲激时的输出）
频率响应	$H(e^{j\Omega})$

卷积（离散版）

连续卷积：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

离散卷积：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

离散卷积 = 加法和乘法，计算机算起来飞快！

0.5.10 9. 完整知识地图

```
Part 4 知识地图：离散世界
========================================================
```

```
现实问题：计算机只能处理数字，怎么处理信号？
    v
  采样（模数转换）
    连续信号 x(t) ---> 离散序列 x[n]
    关键：采样频率 f_s 必须   2 × 最高频率
    否则 -> 混叠（Aliasing）
    预防 -> 抗混叠滤波器
    v
  离散系统的描述
    微分方程 ---> 差分方程
    导数 ---> 差分（减法！）
    v
  离散系统的分析工具
    拉普拉斯变换 ---> Z变换
    微分 -> 乘 s      延迟 -> 乘 z^{-1}
    v
  稳定性分析
    虚轴 ---> 单位圆
    左半平面 ---> 单位圆内（稳定）
    右半平面 ---> 单位圆外（不稳定）
    v
  频率响应
    沿虚轴取值 ---> 沿单位圆取值
    H(j ) ---> H(e^{jΩ})

核心思想：离散世界是连续世界的"数字影子"
          一切连续操作都有对应的离散操作
```

0.5.11 Part 5 预告

现在我们有了四套工具：

工具	用于	处理对象
傅里叶变换	频率分析	连续信号
拉普拉斯变换	稳定性、系统分析	连续系统
Z 变换	稳定性、系统分析	离散系统
(离散傅里叶变换)	频率分析	离散信号

你可能会问：

这四个东西到底有什么关系？

- 为什么傅里叶变换是拉普拉斯变换的特例？
- 为什么 Z 变换对应拉普拉斯变换？
- 为什么离散频率响应沿单位圆取值，连续频率响应沿虚轴取值？
- 它们能不能统一起来？

Part 5：统一视角将回答这个问题。
我们会画出一张大图，把这四个变换放在一起对比，让你看到：

> 它们都是同一个思想的不同表现形式。

等等看。

0.5.12 附录：常见问题

Q1：为什么离散信号的频率上限是 π？

因为 $\Omega = \omega T_s$，而 $f_s = 1/T_s$。
根据奈奎斯特定理，最高频率是 $f_s/2$，对应的角频率是 $\omega_{\max} = 2\pi(f_s/2) = \pi f_s$。
所以 $\Omega_{\max} = \omega_{\max} T_s = \pi f_s \cdot T_s = \pi$。
离散频率的范围是 $[0, \pi]$，对应连续频率 $[0, f_s/2]$。

Q2：**Z** 变换的收敛域是什么？

Z 变换是个无穷级数，不是对所有 z 都收敛的。
收敛域（**ROC, Region of Convergence**）是使级数收敛的 z 的取值范围。

```
例子：x[n] = (0.5)^n u[n]
X(z) = Σ_{n=0}∞ (0.5)^n z^{-n} = Σ (0.5z^{-1})^n

这个级数收敛当且仅当 |0.5z^{-1}| < 1
即 |z| > 0.5

所以 ROC：|z| > 0.5（单位圆外半径为0.5的区域）
```

> 关键：稳定的系统，其收敛域必须包含单位圆。

Q3：离散卷积和连续卷积有什么区别和联系？

相同点：都是”翻转、平移、相乘、求和/积分”的思想。
不同点：- 连续：积分（$\int$）- 离散：求和（$\sum$）
离散卷积是连续卷积的数值近似。

Q4：为什么数字信号处理这么重要？

因为便宜、灵活、可编程。

```
模拟电路:              数字信号处理:
+-------+             +-----------+
|电阻电容|               |写代码改算法|
|焊死了  |              |改几个参数|
|不能改  |              |功能就变了|
+-------+             +-----------+
    v                       v
硬件固定                  软件定义
成本高                    成本低
```

这就是为什么几乎所有现代电子产品都用数字信号处理。

Q5：从连续到离散，丢失的信息能恢复吗？

如果采样满足奈奎斯特定理：能！
只要采样频率 $\geq 2f_{\max}$，理论上可以从离散样本中完美恢复原始连续信号。
恢复方法：低通滤波（也叫”插值”或”重构”）。

```
离散点:
        v 通过低通滤波器（平滑）
恢复:    /\   /\   /\   /\
       /   \/   \/   \/   \
```

这叫做香农采样定理的完整表述：> 如果 $f_s > 2f_{\max}$，则信号可以被样本完美重建。

Part 4 完 | 下一部分：**Part 5** — 统一视角：四大变换的内在联系

0.6 Part 5：统一视角——四大变换的内在联系

核心问题：傅里叶、拉普拉斯、Z 变换之间究竟是什么关系？学完这门课，你到底学到了什么？

0.6.1 5.1 先回头看：我们走过了怎样的路？

在开始这一章之前，请回想一下你这门课的学习旅程：

- **Part 1**：你学会了用数学描述”信号”和”系统”
- **Part 2**：你发现任何信号都可以拆成不同频率的正弦波——这是傅里叶的思想

- **Part 3**：你发现有些系统不稳定，傅里叶搞不定——于是有了拉普拉斯
- **Part 4**：你发现计算机只能处理离散数据——于是有了 **Z** 变换

四个工具，四个故事。但它们之间不是孤立的。
这一章的任务：把这些散落的珠子串成一条项链。

0.6.2 5.2 四大变换：一张谱系图

如果你把四个变换想象成一个家族的”族谱”，就会非常清楚它们是怎么”出生”的：

```
       连续周期信号
            |
        [傅里叶级数 FS]
            |
       (周期 -> ∞)
            |
       连续非周期信号
        /        \
       /          \
  [傅里叶变换]    [拉普拉斯变换]
     (FT)           (LT)
    只关注频率    关注频率+衰减/增长
                    |
               (从连续到离散)
                    |
       离散非周期信号
        /        \
       /          \
[离散时间傅里叶]      [Z变换]
  (DTFT)            (ZT)
 只关注频率      关注频率+衰减/增长
```

5.2.1 这个图在说什么？

这个谱系图揭示了两个”维度”的推广：
维度一：从周期到非周期

- 周期信号 -> 用傅里叶级数（FS/DFS），拆成离散的频率成分
- 非周期信号 -> 用傅里叶变换（FT/DTFT），频率是连续的

维度二：从纯频率到复频率

- 傅里叶家族：只关心 $j\omega$（纯正弦波）
- 拉普拉斯/Z 变换家族：关心 $s = \sigma + j\omega$（衰减/增长 + 正弦波）

5.2.2 一张表看懂四个主角

变换	适用信号	变换变量	物理含义
傅里叶级数 (FS)	连续周期	$n\omega_0$	离散频率分量
傅里叶变换 (FT)	连续非周期	ω	连续频率分布
拉普拉斯变换 (LT)	连续（任意）	$s = \sigma + j\omega$	复频率（含衰减/增长）
离散时间傅里叶 (DTFT)	离散非周期	Ω	离散频率分布
Z 变换 (ZT)	离散（任意）	$z = re^{j\Omega}$	复频率的离散版

0.6.3 5.3 核心思想回顾：所有变换都是" 换个角度看问题"

5.3.1 一个最重要的认知

> 变换不是改变事物本身，而是改变你看它的方式。

想象你有一块水晶：

- 在阳光下看，它是透明的（时域视角）
- 在紫外线下看，它发出荧光（频域视角）
- 用 X 光看，能看到内部结构（复频域视角）

水晶没有变，是你的" 观察工具" 变了。

5.3.2 四个" 观察视角"

视角	数学工具	看到什么	像什么
时域	原始信号 $x(t)$	信号随时间怎么变	看一个人的日常行为
频域	$X(j\omega)$	信号有哪些频率成分	看这个人的性格特质
复频域（s 域）	$X(s)$	信号的衰减/增长 + 频率	看这个人的潜力和极限

视角	数学工具	看到什么	像什么
z 域	$X(z)$	离散信号的衰减/增长 + 频率	看一个人的” 数据画像”

5.3.3 直观类比：做菜

想象你在品尝一道汤：

- 时域：一勺一勺喝，感受味道随时间变化（“嗯，第一口偏咸，后面变淡了”）
- 频域：分析汤里有哪几种味道成分（“有咸味、鲜味、微辣”）
- 复频域：分析这些味道在时间中的演化趋势（“咸味会持续，辣味会衰减”）
- **Z** 变换：每 10 秒采样一勺，用离散数据做出同样的分析

  汤还是那碗汤——你只是换了不同的分析方式。

0.6.4 5.4 s 域、j 域、z 域的关系

这是整门课最关键的公式关系之一。如果你能理解下面这张图，你就理解了这些变换之间的血脉联系。

5.4.1 从拉普拉斯到傅里叶：s = j

回忆拉普拉斯变换的定义：

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

其中 $s = \sigma + j\omega$。
如果让 $\sigma = 0$，即 s 只在虚轴上取值：

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

这不就是傅里叶变换吗?!
核心结论：

傅里叶变换 = 拉普拉斯变换在 $s = j\omega$（虚轴）上的取值

拉普拉斯是” 三维” 的（σ 和 ω 两个维度），傅里叶是” 二维” 的（只有 ω 一个维度）。
你可以这样想象：

- 拉普拉斯变换是一个平面（σ 和 ω 构成的复平面）
- 傅里叶变换是这个平面的一条线（虚轴）

5.4.2 从连续到离散：z = e^{sT_s}

这是连接连续世界和离散世界的桥梁。

Z 变换的定义是：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

而 z 和 s 的关系是：

$$z = e^{sT_s}$$

其中 T_s 是采样间隔。

这看起来只是一个公式，但它有极其深刻的含义：

从 **s** 平面到 **z** 平面的映射关系：

```
s 平面                     z 平面
--------------------------------------
左半平面 ( < 0)     ->    单位圆内部 (|z| < 1)
虚轴     ( = 0)     ->    单位圆边界 (|z| = 1)
右半平面 ( > 0)     ->    单位圆外部 (|z| > 1)
```

5.4.3 为什么这个映射如此重要？

因为稳定性的判断标准在两个世界中完美对应：

系统类型	s 域条件	z 域条件
稳定	极点都在左半平面	极点都在单位圆内
临界稳定	极点在虚轴上	极点在单位圆上
不稳定	极点在右半平面	极点在单位圆外

这是整门课最优雅的地方之一——连续和离散世界的稳定性理论，在数学上完美对称。

5.4.4 从 Z 变换到离散频率：z = e^{jΩ}

和连续世界类似，如果让 z 只在单位圆上取值：

$$z = e^{j\Omega}$$

代入 Z 变换：

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

这就是离散时间傅里叶变换 (**DTFT**)！

核心结论：

DTFT = **Z** 变换在单位圆上的取值

5.4.5 三者的关系总图

```
连续世界：        拉普拉斯变换 X(s)
                       |
                +------+------+
                | s = j       |
                              |
         傅里叶变换             |
         X(j )                |
                              | s =   + j （一般情况）
                              |
                     [z = e^{sT_s}]
                              |

离散世界：             Z变换 X(z)
                         |
                  +------+------+
                  | z = e^{jΩ}  |
                                |
            DTFT                |
         X(e^{jΩ})              | z = re^{jΩ}（一般情况）
```

5.4.6 一个更直观的理解

想象你在拍一部纪录片：

- 拉普拉斯变换 = 一部完整的电影（包含所有细节，可以快进/快退，分析趋势）
- 傅里叶变换 = 这部电影的截图（只取虚轴这一帧）
- **Z** 变换 = 电影被数字化后的 MP4 文件（离散版本）
- **DTFT** = 这个 MP4 文件的截图（离散版本的虚轴）

0.6.5 5.5 统一的思想：特征函数

现在到了整门课最深刻的部分。

5.5.1 什么是" 特征函数"？

你可能在线性代数中学过" 特征向量" 的概念：

一个矩阵 A 作用于向量 v，结果等于 v 的缩放：$Av = \lambda v$

“特征函数” 是同样的道理：

一个 LTI 系统 H 作用于函数 $f(t)$，结果等于 $f(t)$ 的缩放

5.5.2 LTI 系统的特征函数是什么？

答案是：指数函数。

- 连续世界：e^{st} 是 LTI 系统的特征函数
- 离散世界：z^n 是 LTI 系统的特征函数

证明非常简单（理解思想即可，不需要记住公式）：
如果一个 LTI 系统的冲激响应是 $h(t)$，输入 $x(t) = e^{st}$，那么输出是：

$$y(t) = h(t) * e^{st} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]}_{H(s)} \cdot e^{st}$$

看到没有？输出 = 一个常数 $H(s)$ 乘以输入 e^{st}。

e^{st} 经过 **LTI** 系统，还是 e^{st}——只是幅度变了。

5.5.3 为什么这对理解变换至关重要？

因为傅里叶变换、拉普拉斯变换、Z 变换的本质都是：

把任意信号拆成 LTI 系统” 特征函数” 的线性组合

具体来说：

变换	拆成什么的线性组合？	为什么选它？
傅里叶	$e^{j\omega t}$ （纯正弦波）	它是 LTI 系统的特征函数
拉普拉斯	e^{st} （复指数）	它是 LTI 系统的特征函数（最一般形式）
Z 变换	z^n （离散复指数）	它是离散 LTI 系统的特征函数

5.5.4 这就解释了为什么所有变换都是” 对信号做内积”

你有没有注意到，这些变换的公式都有相同的形式？
连续世界：

$$X(\text{参数}) = \int x(t) \cdot [\text{特征函数}]^* dt$$

离散世界：

$$X(\text{参数}) = \sum x[n] \cdot [\text{特征函数}]^*$$

它们都是在问同一个问题：

“信号中有多少这个特征函数的成分？”

5.5.5 一句话总结

> **傅里叶/拉普拉斯/Z 变换的本质 = 把信号拆成 LTI 系统" 特征函数" 的线性组合**

这就是为什么这门课把这三个变换放在一起讲——它们在数学上是同一件事情。

0.6.6 5.6 学完这门课，你获得了什么能力？

现在让我们从更高的角度看看，你通过这门课获得了哪些实实在在的能力。

5.6.1 能力一：分析能力

> 给定一个系统，能预测它对任意输入的响应

- 时域法：卷积 $y(t) = x(t) * h(t)$
- 变换域法：$Y(s) = H(s)X(s) \to y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$
- 频率法：通过频率响应预测系统对不同频率信号的放大/衰减

现实意义：给你一个电路/滤波器，你能算出输入任何信号时输出是什么。

5.6.2 能力二：设计能力

> 给定需求，能设计出满足要求的系统

- 滤波器设计：想要低通？高通？带通？设计对应的 $H(s)$ 或 $H(z)$
- 控制器设计：让不稳定的系统变稳定（控制理论的基础）
- 均衡器设计：补偿信号的频率失真

现实意义：客户说" 我要一个能滤掉 50Hz 噪声的系统"，你能设计出来。

5.6.3 能力三：诊断能力

> 能判断系统是否稳定，哪里有问题

- 极点分析：看系统函数的极点位置判断稳定性
- 频率响应：看幅频/相频曲线判断信号失真情况
- 因果性检查：判断系统是否物理可实现

现实意义：给你的音响系统做" 体检"，发现它在某个频率会自激振荡。

5.6.4 能力四：转换能力

能在时域/频域/复频域之间自由切换

- 时域看不懂？换到频域
- 频域不够用？换到复频域
- 连续搞不定？采样换到离散

现实意义：遇到问题时不是硬刚，而是灵活选择最合适的分析工具。

0.6.7 5.7 一张” 终极” 思想地图

现在，让我们把整门课画成一张地图：

```
                    现实世界中的信号
                          |
             +------------+------------+
             |                         |
          连续信号                   离散信号
             |                         |

        +----------+            +--------------+
        | 微分方程  |            |  差分方程      |
        | d²y/dt²  |            | y[n] - ay[n-1]|
        +----+-----+            +------+-------+
             |                         |
        +---- -----+             +----- -------+
        | 拉普拉斯  |             |   Z变换      |
        | 变换      |             |             |
        +----+-----+             +-----+-------+
             |                         |

        +----------+            +--------------+
        |  H(s)    |            |    H(z)      |
        | 系统函数  |            |  系统函数      |
        +----+-----+            +------+-------+
             |                         |
    +--------+--------+     +---------+---------+
    |        |        |     |         |         |

+-------+ +-------+ +-----+ +-----+ +-------+ +-------+
|稳定    | |频率    | |求解| |稳定| |频率     | |求解     |
```

```
|性分析| |响应   | |微   | |性分| |响应     | |差分    |
|      | |       | |分方| |析  | |         | |方程    |
|极点  | |s=j   | |程   | |极点| |z=e^{jΩ| |        |
|位置  | |->幅频 | |变代| |在单| |}->幅频 | |代数化 |
+------+ +-------+ |数   | |位圆| +--------+ +--------+
                   +----+ |内外|
                          +----+
```

```
+-------------------------------------+
|          背后统一的数学思想          |
|                                     |
|  "分解 + 变换 + 组合"               |
|                                     |
|  把复杂信号 -> 拆成简单成分          |
|  -> 分别处理 -> 组合成结果           |
|                                     |
|  本质：用LTI系统的"特征函数"         |
|  （e^{st} / z^n）作为"原子"来分解信号 |
+-------------------------------------+
```

0.6.8 5.8 学完这门课，你获得了什么” 思维工具”？

让我们把这些工具放进一个” 工具箱” 里：

工具	适用场景	什么时候用
卷积	时域分析	信号简单、系统简单时
傅里叶变换	频率分析	想知道信号的频率成分、系统的频率响应
拉普拉斯变换	连续系统全面分析	分析稳定性、求解微分方程、有初始条件
Z 变换	离散系统全面分析	数字滤波器设计、离散系统稳定性
DTFT	离散系统频率分析	数字滤波器的频率响应

选择指南

如果你的问题是… 请用…

```
"这个信号里有哪些频率？"             -> 傅里叶变换
"这个系统会不会自激振荡？"            -> 拉普拉斯/Z变换（极点分析）
"这个电路对10kHz信号的响应如何？"     -> 傅里叶变换（频率响应）
```

```
"这个系统有初始储能，求输出？"        -> 拉普拉斯变换（含初始条件）
"这个数字滤波器效果怎样？"           -> Z变换（系统函数）+ DTFT（频率响应）
"这个系统到底稳不稳？"              -> 拉普拉斯/Z变换（极点位置）
"我只是想知道输出波形..."            -> 卷积（最简单直接）
```

0.6.9 5.9 信号与系统的"世界观"

如果你只能从这门课带走一样东西，我希望是下面这个思维方式：

5.9.1 核心世界观：域转换

> 当一个问题在一个域中很难时，换到另一个域可能变得非常简单。

这个思想贯穿了整门课的每一个角落：

在哪个域很难	换到哪个域	为什么变简单了
时域：卷积很复杂	频域/复频域	卷积变成乘法
时域：微分/差分方程难解	复频域	微分/差分变成代数运算
时域：稳定性看不出来	复频域	看极点位置一目了然

5.9.2 这个世界观不止适用于这门课

"域转换"的思想是一个通用的问题解决方法，你可以用在任何地方：

- 数学：笛卡尔坐标系下难解的方程，极坐标系下可能一目了然
- 编程：面向对象难设计的问题，函数式编程可能很优雅
- 生活：正面沟通行不通，换个角度（域）也许就能解决

5.9.3 "分解"是最强大的思维武器

除了"域转换"，这门课还教会了你"分解"：

- 傅里叶分解：把复杂波形分解成简单正弦波
- 部分分式展开：把复杂分式分解成简单分式
- 线性系统分解：把复杂系统分解成基本模块的级联/并联

> 所有复杂问题，拆成简单问题的组合，就不再复杂了。

0.6.10 5.10 写给零基础同学的” 一句话毕业总结”

如果你只能记住三句话：

1. 傅里叶变换让你看到信号的” 成分”——就像营养标签让你看到食物的成分
2. 拉普拉斯变换让你看透系统的” 性格”——包括它会不会崩溃（稳定性）
3. **Z** 变换让你在计算机的世界里做同样的事——把连续世界的智慧搬到离散世界

如果你只能记住一句话：

> 信号与系统教会你的不是数学公式，而是一种思维方式：当一个问题太难时，换一个角度（域）看它。
>
> 具体来说：

```
傅里叶：从时间维度 -> 频率维度
拉普拉斯：从实轴 -> 复平面（增加了"趋势"维度）
Z变换：从连续 -> 离散（让计算机也能处理信号）
```

> 这就像戴着不同颜色的墨镜看世界。
> 世界没变，但你看到的东西不一样了。
> 而当你学会了在所有视角之间自由切换，你就拥有了比公式更重要的东西——
> 一种分析问题的思维方式。

0.6.11 附录：快速对照表

四大变换公式一览

变换	公式	适用
傅里叶级数	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	连续周期信号
傅里叶变换	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$	连续非周期信号
拉普拉斯变换	$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$	连续信号（任意）
DTFT	$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$	离散非周期信号
Z 变换	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$	离散信号（任意）

核心关系一览

```
拉普拉斯 X(s) --- s = j  ---> 傅里叶 X(j )
拉普拉斯 X(s) --- z = e^{sT_s} ---> Z变换 X(z)
Z变换 X(z) --- z = e^{jΩ} ---> DTFT X(e^{jΩ})
```

稳定性判据一览

系统类型	连续（拉普拉斯）	离散（Z 变换）
稳定	所有极点在左半平面	所有极点在单位圆内
临界稳定	极点在虚轴上（单极点）	极点在单位圆上（单极点）
不稳定	有极点在右半平面	有极点在单位圆外

恭喜你走完了这段旅程！

信号与系统是很多高阶课程的基础：- 数字信号处理 (DSP) - 自动控制原理 - 通信原理 - 数字图像/音频处理

这些小册子里的" 第一性原理" 思维，会在未来的学习中反复出现。

记住：不要被公式吓倒，永远回到" 为什么需要这个" 去思考。

Part 5 完 / 信号与系统第一性原理小册子完