

信号与系统

第一性原理小册子

从零开始，用最朴素的思想构建整个知识体系

复杂事物 = 简单事物的组合
这就是信号与系统的全部秘密

Contents

0.1	信号与系统：第一性原理小册子	3
0.1.1	这本小册子的写法	3
0.1.2	五步思想旅程	3
0.1.3	内容结构	3
0.1.4	阅读建议	3
0.1.5	输出文件	4
0.2	Part 1: 信号是什么？系统是什么？	4
0.2.1	写在前面：为什么你正在学这门课？	4
0.2.2	1. 信号就是” 会变化的东西”	4
0.2.3	2. 系统就是” 把信号变一下的东西”	7
0.2.4	3. 为什么要分析系统？	8
0.2.5	4. 最重要的一类系统：LTI（线性时不变系统）	10
0.2.6	5. 核心思想预告：分解的力量	13
0.2.7	知识地图：Part 1 所有概念的关系	14
0.2.8	总结：Part 1 你一定要记住的 5 句话	16
0.2.9	Part 1 自测题	16
0.2.10	Part 2 预告	16
0.3	Part 2: 分解的魔法 — 傅里叶思想	17
0.3.1	知识地图	17
0.3.2	1. 问题：如何分析复杂信号？	18
0.3.3	2. 找到” 基本砖块”：正弦波	19
0.3.4	3. 第一步：周期信号的分解（傅里叶级数）	20
0.3.5	4. 第二步：非周期信号的分解（傅里叶变换）	22
0.3.6	5. 直观理解频域	23
0.3.7	6. 为什么频域分析这么有用？	24
0.3.8	7. 采样定理（直观版）	26
0.3.9	8. 傅里叶思想的局限	28
0.3.10	总结：Part 2 核心知识点卡片	29
0.3.11	预备知识清单	29
0.3.12	Part 3 预告	30
0.4	Part 3: 推广变换 —— 当傅里叶不够用时	30
0.4.1	0. 从 Part 2 的末尾说起	30
0.4.2	1. 傅里叶变换的局限	31

0.4.3	2. 核心思想：加一个“衰减因子”	32
0.4.4	3. s 域到底是什么？	33
0.4.5	4. 为什么说拉普拉斯变换“把微分变乘法”？	35
0.4.6	5. 系统函数 $H(s)$ 和稳定性	36
0.4.7	6. s 域 vs 频域：两张“地图”的关系	39
0.4.8	7. 实际应用：电路分析	40
0.4.9	8. 回顾与地图：拉普拉斯思想全景	42
0.4.10	9. 一句话总结全章	44
0.4.11	Part 4 预告：数字世界	44
0.5	Part 4: 离散世界 — 计算机怎么处理信号？	44
0.5.1	开篇：两个世界的桥梁	44
0.5.2	1. 为什么需要离散信号？	45
0.5.3	2. 采样：从连续到离散的桥梁	46
0.5.4	3. 奈奎斯特采样定理（直观版）	47
0.5.5	4. 从微分方程到差分方程	49
0.5.6	5. Z 变换：离散世界的“拉普拉斯变换”	51
0.5.7	6. z 平面分析（直观版）	54
0.5.8	7. 连续 vs 离散对照表（核心!）	56
0.5.9	8. 离散世界的“信号处理三件套”	58
0.5.10	9. 完整知识地图	58
0.5.11	Part 5 预告	59
0.5.12	附录：常见问题	60
0.6	Part 5: 统一视角——四大变换的内在联系	61
0.6.1	5.1 先回头看：我们走过了怎样的路？	61
0.6.2	5.2 四大变换：一张谱系图	62
0.6.3	5.3 核心思想回顾：所有变换都是“换个角度看问题”	63
0.6.4	5.4 s 域、j 域、z 域的关系	64
0.6.5	5.5 统一的思想：特征函数	66
0.6.6	5.6 学完这门课，你获得了什么能力？	68
0.6.7	5.7 一张“终极”思想地图	69
0.6.8	5.8 学完这门课，你获得了什么“思维工具”？	70
0.6.9	5.9 信号与系统的“世界观”	71
0.6.10	5.10 写给零基础同学的“一句话毕业总结”	72
0.6.11	附录：快速对照表	72

0.1 信号与系统：第一性原理小册子

从零开始，用最朴素的思想，构建整个信号与系统知识体系

0.1.1 这本小册子的写法

传统教材从定义出发，这本小册子从问题出发。

每一章解决一个核心问题，从“为什么需要这个东西”开始，逐步推导出整个理论。不需要微积分基础（会解释每一步），只需要最朴素的逻辑思维。

0.1.2 五步思想旅程

现实世界的问题

v

为什么需要信号与系统？（Part 1）

v

如何分解复杂信号？（Part 2：傅里叶思想）

v

如何分析不稳定系统？（Part 3：拉普拉斯思想）

v

计算机如何处理信号？（Part 4：离散与Z变换）

v

这一切的内在联系？（Part 5：统一视角）

0.1.3 内容结构

部分	核心问题	解决思路
Part 1	信号是什么？系统是什么？	从温度计、音响等日常例子出发
Part 2	如何看清信号的“成分”？	傅里叶：把信号拆成不同频率的正弦波
Part 3	如何分析系统的“性格”？	拉普拉斯：把微分方程变成代数方程
Part 4	计算机怎么处理信号？	采样 + 差分方程 + Z 变换
Part 5	这一切有什么联系？	四大变换的对比和统一

0.1.4 阅读建议

- 第 1 遍：只读每部分的“核心思想”（粗体部分）和“一句话总结”
- 第 2 遍：读“为什么”部分
- 第 3 遍：看推导和例子

0.1.5 输出文件

文件	内容
part1_ 信号是什么.md	Signals & Systems 基本概念
part2_ 分解的魔法.md	傅里叶级数 -> 傅里叶变换
part3_ 推广变换.md	拉普拉斯变换
part4_ 离散世界.md	离散时间 + Z 变换
part5_ 统一视角.md	四大变换对比 + 总结

0.2 Part 1: 信号是什么? 系统是什么?

核心问题: 这世界充满各种变化, 我们怎么描述它? 怎么利用它?

目标: 用最直观的方式, 建立信号与系统的世界观——不需要微积分, 只需要好奇心。

0.2.1 写在前面: 为什么你正在学这门课?

想象一下, 你拿着手机听音乐——手机里的电信号变成声音传到耳朵; 你说“Hey Siri”, 声音变成电信号被手机理解。你在微信发照片, 照片被压缩、传输、解压, 最终显示在朋友手机上。你做心电图, 心脏的电信号被放大、滤波, 医生根据这个信号判断你的健康。

这背后全部是“信号与系统”。

这门课不是在教你一堆数学公式。它在教你一个看待世界的框架: 任何事情只要“会变化”, 你就可以用信号来描述它; 任何设备只要“处理信息”, 你就可以用系统来分析它。

准备好了吗? 我们从最基础的东西开始。

0.2.2 1. 信号就是“会变化的东西”

问题: 怎么描述一个正在变化的世界?

桌子上的水杯没有变化——它就在那里, 静止不动。但你的体温在变化 (早上低、下午高), 窗外的声音在变化 (汽车经过时声音大、安静时声音小), 手机屏幕的亮度在变化 (自动调节)。

世界的本质不是静止的, 而是变化的。

那问题来了: 怎么把这些变化“记录下来”并“说给别人听”?

核心思想

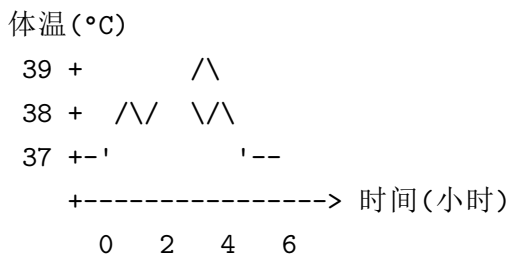
信号 = 一个物理量随时间（或空间）的变化过程

说得更直白一点：- 把温度计放在窗口，每隔 1 分钟记一次数字 -> 你得到了一个” 温度信号” - 用麦克风录音，记录空气振动 -> 你得到了一个” 声音信号” - 用手机拍照，记录每个点的亮度 -> 你得到了一个” 图像信号”

只要某样东西在变化，并且这些变化携带着信息，它就是信号。

直观理解：三种最常见的信号

(1) 温度信号——最容易理解的信号 你发烧了，体温变化：

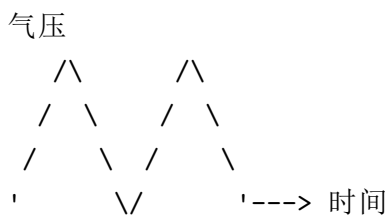


这个图表达的是：体温随时间变化。横轴是时间，纵轴是温度。这就是一个信号。

你不需要任何数学，你已经理解了什么是信号。信号就是” 一个东西怎么变” 的记录。

(2) 声音信号——空气在” 抖” 当你说话时，声带振动，压缩周围的空气。这个振动传到别人耳朵里，别人就听到了你的声音。

空气中的气压在快速变化：

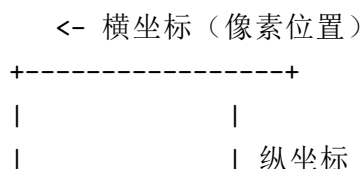


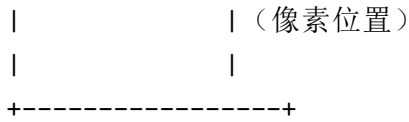
这个上下抖动的曲线就是声音信号。频率越高，音调越高；幅度越大，音量越大。

你不需要学傅里叶变换才能理解声音——你每天都在用耳朵处理声音信号。

(3) 图像信号——把” 空间” 也加进来 温度信号、声音信号，都是随时间变化的。但一张照片呢？

照片不会随时间变化（除非是视频），但它在空间上变化：





每个点的亮度不同：亮的区域数值大，暗的区域数值小。

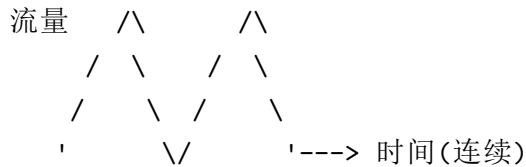
所以图像是随位置变化的信号。更准确地说，图像是两个空间变量的函数： $f(x, y)$ 表示在位置 (x, y) 处的亮度。

信号无处不在。它们就是”世界的变化”。

信号分类：连续 vs 离散

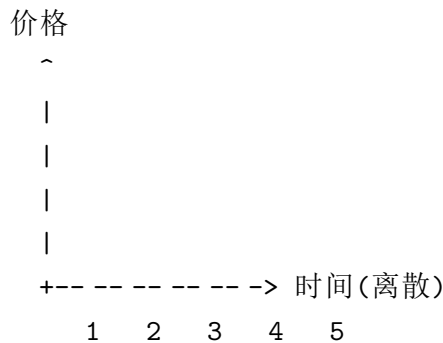
这是个重要的分类，但理解起来很简单。

连续时间信号：每时每刻都有值 就像水龙头流出的水——每一瞬间都有流量。



数学上写为 $x(t)$ ，意思是”在时刻 t 的取值”。 t 可以取任何值——1 秒、1.5 秒、1.578423 秒，都可以。

离散时间信号：只在特定时刻有值 就像股票的每日收盘价——只在每天收盘时有价格，中间的时间没有记录。



数学上写为 $x[n]$ ，意思是”在第 n 个时刻的取值”。 n 只能是整数——第 1 天、第 2 天、第 3 天.....

为什么这个区分很重要？

类型	例子	数学表示	对应的工具
连续信号	模拟录音带、真实世界的声音	$x(t)$	傅里叶变换、拉普拉斯变换

类型	例子	数学表示	对应的工具
离散信号	MP3、数码照片、股票数据	$x[n]$	Z 变换、数字信号处理

真实世界是连续的（声音连续振动），但计算机只能处理离散的（数字录音）。连续 -> 离散 -> 处理 -> 还原成连续，这就是现代信号处理的全过程。

你会在 Part 4 深入理解这个转换。现在只需要知道：连续是“每时每刻”，离散是“每隔一段时间记一次”。

一句话记忆

变化就是信号。

0.2.3 2. 系统就是“把信号变一下的东西”

问题：有了信号，然后呢？

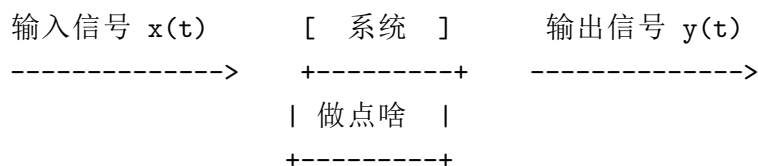
光有信号还不够。你有一个带回声的声音信号（从演唱会录的），你想要去回声。你有一张昏暗的照片，你想要调亮。你有一个人的说话录音，你想要识别他在说什么。

这些“处理信号”的东西，就是系统。

核心思想

系统 = 输入一个信号 -> 做某种变换 -> 输出另一个信号

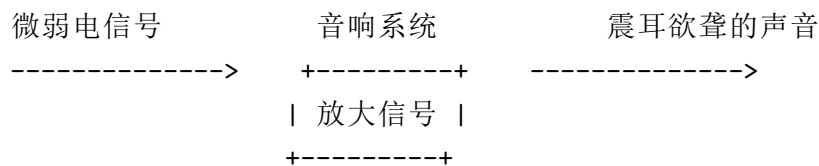
这是理解整个课程最关键的思维模型：



信号是原材料，系统是加工厂。

直观理解：三个身边的例子

(1) 音响系统：放大器

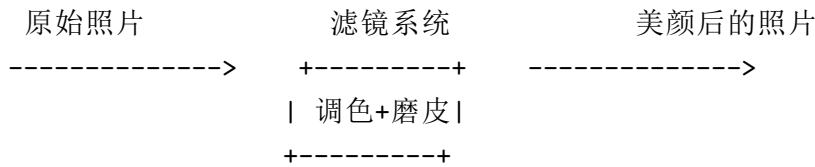


麦克风拾取的声音信号非常微弱，经过音响的放大，变成能推动喇叭的大信号。

音响做的事情很简单：输出 = 输入 × 放大倍数。

数学上： $y(t) = A \cdot x(t)$ ，其中 A 是放大倍数。

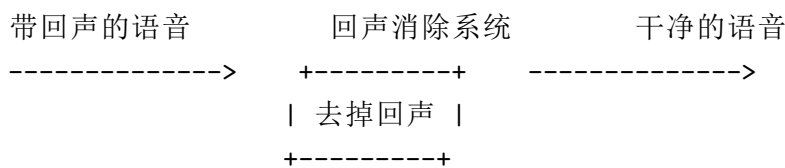
(2) 手机滤镜：图像处理器



输入是一张原始照片信号，滤镜做了两件事：- 让皮肤更光滑（某种“滤波”）- 让颜色更鲜艳（某种“变换”）

输出是一张更好看的照片。

(3) 回声消除：你的耳机在做的事



你在 Zoom 会议里说话，对方听到有回声。回声消除系统分析：哪些是原始声音？哪些是回声（延迟的、减弱的版本）？然后去掉回声。

这比放大复杂得多——系统需要知道“延迟了多久”、“衰减了多少”。

这些例子的共同点：都有一个输入信号，经过某种处理，得到输出信号。

系统的“性格”由什么决定？

不同的系统对同一个输入有不同反应。给同一个声音信号：- 低音炮：保留低音，减弱高音（低通滤波器）- 高音喇叭：保留高音，减弱低音（高通滤波器）- 均衡器：某些频段加强，某些频段减弱

系统的“性格”就是它对输入信号的改造方式。

在后面的课程中，我们会学习如何精确描述这种“性格”。

一句话记忆

系统把信号从一种形式变成另一种。

0.2.4 3. 为什么要分析系统？

问题：知道什么是系统之后，然后呢？

好，现在你知道信号是什么、系统是什么了。但这就够了吗？

想象你正在设计一个助听器。你把麦克风放在耳朵上，你需要：放大某些频率的声音（人声），减弱其他频率的声音（噪音），同时确保不会突然爆音把用户耳朵震坏。

你需要预测：给定一个输入，系统的输出是什么？

2. 稳定性：如果输入是正弦波，输出会不会越来越大直到爆炸？

- 答：不会。RC 电路是天生稳定的。输入多大，输出最大也就多大，不会失控。

3. 设计：我想让 RC 电路只让 20Hz 以下的声音通过（低通滤波器）， R 和 C 应该怎么选？

- 答：选 RC 乘积使得截止频率 $f_c = \frac{1}{2\pi RC} = 20\text{Hz}$ 。

三个核心问题的更广视角

稳定性的直觉：> 稳定 = 输入有限，输出也有限。> 你踢一下秋千（有限输入），秋千晃几下停下来（稳定系统）。> 你踢一下秋千，秋千越晃越高直到翻过去（不稳定系统）。

设计系统的直觉：> 设计 = 选择合适的参数，让系统做你想要的事。> 就像调音响的均衡器——你想让低音重一点，就把低频旋钮调大。

一句话记忆

分析系统 = 预测它 + 确认它稳定 + 设计它。

0.2.5 4. 最重要的一类系统：LTI（线性时不变系统）

问题：世上有各种各样的系统，从哪里开始？

有的系统复杂得可怕——人的大脑就是一个系统，输入是感官信号，输出是思想和行动。这种系统目前根本无法用数学完整描述。

我们需要从最简单、最有用的一类系统开始。

这就是 LTI 系统——现实世界中大量系统（包括 RC 电路）都属于这一类。

核心思想

LTI = Linear（线性）+ Time-Invariant（时不变）

线性：输入放大 -> 输出同比例放大；输入叠加 -> 输出叠加时不变：今天做和明天做，效果一样

这两个性质加在一起，让系统变得异常简单——只要知道它对一个“冲激”的反应，就能知道它对任何输入的反应。

直观理解：线性（Linear）

(1) 齐次性（比例放大）

输入放大 k 倍，输出也放大 k 倍。

输入 $x(t)$ -> 输出 $y(t)$

输入 $2 \cdot x(t)$ -> 输出 $2 \cdot y(t)$

输入 $0.5 \cdot x(t)$ -> 输出 $0.5 \cdot y(t)$

生活中的例子：- 音响是线性的（理想情况下）：你把音量旋钮调大一倍，声音也大一倍。
- 一面镜子是线性的：你离远一倍，像也缩小一倍（近似）。

反例：- 麦克风过载：你喊得太大，声音会破裂失真——输出不再随输入比例变化。这不是线性。

(2) 可加性（叠加原理）

两个输入的和 = 各自输出的和。

输入 A → 输出 y_A

输入 B → 输出 y_B

输入 A+B → 输出 $y_A + y_B$

这就是“叠加原理”。这是信号与系统最重要的概念之一。

生活中的例子：- 两个人同时说话，你听到的是两个人的声音叠加在一起。- 如果把两个人的录音分别播放，然后把两个播放的声音同时放，和两个人同时说话是一样的。

叠加原理的威力：如果你知道系统对“基本信号”的反应，你就可以通过组合这些基本信号，得到任何输入的反应。这就像：- 你知道怎么搭积木块（基本信号的处理结果）- 你就可以搭出任何形状（任何信号的处理结果）

线性的数学表达（不害怕，很直观） 如果系统对输入 $x_1(t)$ 输出 $y_1(t)$ ，对输入 $x_2(t)$ 输出 $y_2(t)$ ，那么对输入 $a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$ （其中 a 、 b 是任意常数），输出一定是：

$$y(t) = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

翻译成成人话：你把两个输入按比例混合，系统输出的就是两个对应的输出按同样比例混合。

直观理解：时不变（Time-Invariant）

核心思想：延迟输入 = 延迟输出

现在做和以后做，效果一样。

---上午按门铃---> 门铃响

---下午按门铃---> 门铃响（同样的声音，只是时间不同）

数学上：如果输入 $x(t)$ 产生输出 $y(t)$ ，那么输入 $x(t - t_0)$ （延迟了 t_0 时间）产生输出 $y(t - t_0)$ （输出也延迟同样的时间）。

生活中的例子

- 门铃：时不变。你早上按门铃和晚上按门铃，门铃声音一样（除了时间不同）。
- 音响：时不变（理想）。今天放这首歌和明天放这首歌，音响出来的声音一样。
- RC 电路：时不变。今天给一个方波和明天给一个方波，输出波形完全一样（只是时间不同）。

反例：- 浴缸放水：时变。早上放水和晚上放水，出水的温度可能不同（因为热水器可能被其他人用过了）。- 老化电子元件：时变。去年和今年的音响听起来不一样了，因为元件老化了。

为什么时不变如此重要？因为它让预测变得可行！如果系统是时变的，你每天都需要重新学习和测试它。如果系统是时不变的，你学一次就够了——今天的规律明天仍然适用。

为什么 LTI 是信号与系统的”圣杯“？

有了线性和时不变，一个惊人的结果出现了：

LTI 系统可以被它的”冲激响应“完全描述。

冲激响应是什么？

- 你给系统一个非常短、非常猛输入（就像拍了桌子一下）
- 系统会”震动“一下然后恢复
- 这个”震动“的波形就是冲激响应

LTI 系统的神奇之处在于：只要知道了这个”震动“的波形，你就知道系统对任何输入的响应。

为什么？因为你把任何输入信号都看成”无数个不同时刻、不同大小的拍桌子“的叠加。利用线性（叠加原理）和时不变（延迟相同），你就可以把无数个”拍桌子响应“拼成最终的输出。

这就是卷积的思想。你会在这门课的第二章学到它。

知道了冲激响应 $h(t)$

v

任何输入信号 $x(t)$ \rightarrow 输出信号 $y(t) = x(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积

公式： $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$

现在别怕这个积分——Part 2 和 Part 3 会把它变成简单的乘法。这就是傅里叶变换和拉普拉斯变换要做的事！

不是 LTI 的例子——帮你加深理解

系统	为什么不是 LTI?
平方器： $y(t) = [x(t)]^2$	非线性。输入 2 倍，输出 4 倍（不是 2 倍）
时间压缩器： $y(t) = x(2t)$	时变。输入延迟不代表输出也延迟同样时间
阈值检测器： $y = 1$ 如果 $x > 0$ 否则 $y = 0$	非线性。两个小信号叠加可能超过阈值，但各自都不超过

系统	为什么不是 LTI?
人耳	近似线性但非时不变? 如果听同一首歌你心态不同感受不同

一句话记忆

LTI = 输入放大 n 倍输出放大 n 倍 + 今天做和明天做一样。

0.2.6 5. 核心思想预告：分解的力量

问题：一个超级复杂的问题，怎么解？

想象你面前有一碗超级复杂的乐高模型。你该怎么理解它？

你可以把它拆成一块块乐高积木。理解了每一个积木块，你就理解了整个模型。
这是整个信号与系统课程最重要的思想，没有之一。

核心思想

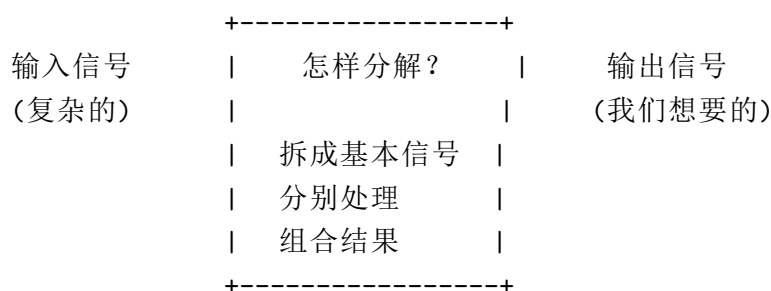
复杂问题 -> 拆成简单问题 -> 分别解决 -> 组合答案。

这个编程里叫“分治法”，在信号与系统里叫“分解”。

LTI 系统的”分解”策略

我们已经学过了：LTI 系统可以通过冲激响应来完全描述。但卷积计算很麻烦（有积分）。

这门课的后续每一章，本质上都是在回答：怎么把”复杂信号”拆成”基本信号”的叠加，使得计算变得简单？



各种”拆法”一览

方法	把信号拆成...	有什么用?
冲激分解	不同时刻的冲激	Part 2 前奏：引出卷积
傅里叶分解	不同频率的正弦波	Part 2 主菜：看清信号的”频率成分”
拉普拉斯分解	指数增长/衰减的正弦波	Part 3: 分析不稳定系统

方法	把信号拆成...	有什么用?
Z 变换	离散世界的”拉普拉斯”	Part 4: 计算机信号处理

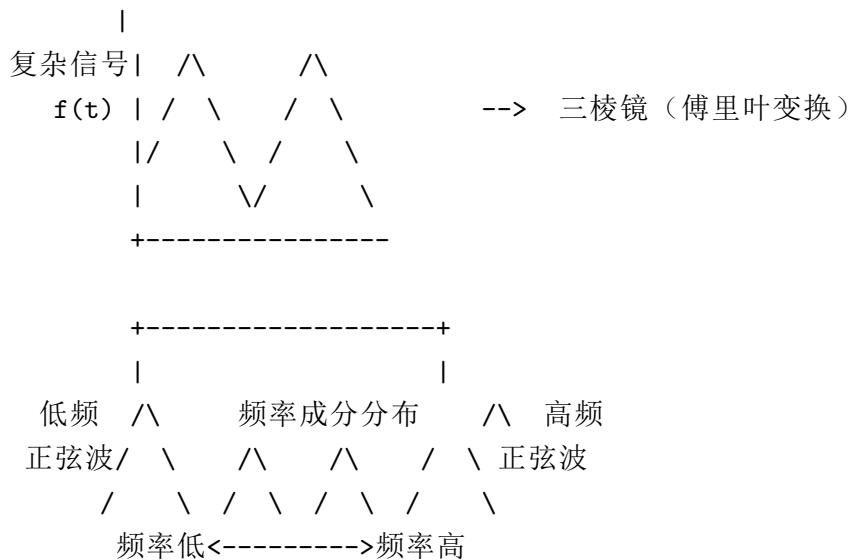
每一种分解方式，都是把这个”拆解”思想的具体化。

预告：傅里叶是怎么拆的？

傅里叶提出了一个疯狂的想法：

任何信号（无论多复杂）都可以写成不同频率、不同幅度、不同相位的正弦波的叠加。

就像白光经过三棱镜被分解成彩虹——七种颜色的光叠加成白光。



你猜为什么正弦波这么特殊？

因为正弦波通过 LTI 系统后，仍然是正弦波——只是幅度和相位变了！

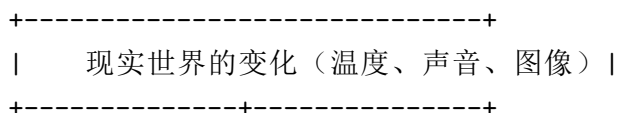
这意味着如果你把输入拆成正弦波，每个正弦波通过系统后你都知道结果（幅度变了、相位变了），把它们加起来就得到了最终的输出。

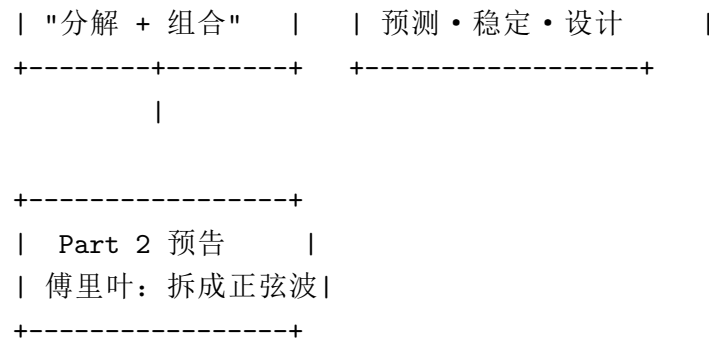
这就是傅里叶变换的魔力。Part 2 会详细讲这个。

一句话记忆

任何信号都可以拆成简单信号的叠加。

0.2.7 知识地图：Part 1 所有概念的关系





0.2.8 总结：Part 1 你一定要记住的 5 句话

# 一句话	对应的概念
1 变化就是信号。	信号的定义
2 系统把信号从一种形式变成另一种。	系统的定义
3 分析系统 = 预测 + 稳定 + 设计。	为什么学这个
4 LTI = 放大 n 倍输出 n 倍 + 今天做和明天一样。	线性 + 时不变
5 任何信号都可以拆成简单信号的叠加。	整门课程的核心思想

0.2.9 Part 1 自测题

学完这一部分，你应该能回答以下问题。如果不能，建议回去再看一遍相关章节。

基础题（立刻回答）：1. 什么是一个信号？举三个生活中的例子。2. 什么是一个系统？举两个生活中的例子。3. 连续信号和离散信号的区别是什么？4. 什么是线性？用“放大”和“叠加”两个词解释。5. 什么是时不变？用一句话解释。

思考题（需要想一下）：6. 一个“平方器”系统 $y(t) = [x(t)]^2$ 是线性的吗？为什么？7. 为什么 LTI 系统如此重要？8. 怎么看 RC 电路是一个系统？它的输入是什么？输出是什么？9. “分解思想”在信号与系统课程中有多重要？它能用在哪些地方？

挑战题（如果你觉得前面的太简单）：10. 假如一个系统 $y(t) = x(t) + 1$ （输出 = 输入 + 1），它是线性的吗？给个理由。（提示：检查叠加原理是否成立）

0.2.10 Part 2 预告

现在我们知道了：- 信号是会变化的东西 - 系统是改变信号的机器 - LTI 系统是最重要的一类系统

但有一个致命的问题没解决：

预告 Part 3: 傅里叶只能分析"稳定"系统, 拉普拉斯来解决

0.3.2 1. 问题：如何分析复杂信号？

1.1 一杯混合果汁

想象你面前有一杯果汁。喝一口，味道很复杂 — 有点甜、有点酸、还有点涩。你怎么知道这里面有什么？

你可能会想：这杯果汁 = 橙汁 + 苹果汁 + 西瓜汁。

换句话说——你把复杂的东西想象成简单东西的组合。然后你就能分析了：- 甜味 -> 来自苹果汁 - 酸味 -> 来自橙汁 - 清爽感 -> 来自西瓜汁

信号分析也是一样。我们拿到一个复杂的信号，想知道”里面有什么”。

1.2 一段音乐

你听到一段音乐。它是很多种声音混在一起的：- 歌手的声音 - 吉他的声音 - 鼓的声音 - 贝斯的声音

你的耳朵神奇地能做到一件事：从混合的声音中提取你关注的那个。在嘈杂的派对上，你还能听到朋友说话 — 这叫”鸡尾酒会效应”。

你的大脑天生就会做”信号分解”。但我们的大脑说不清自己是怎么做到的。数学的作用就是：把这种本能变成精确的工具。

1.3 核心思想

复杂事物 = 简单事物的组合。

就这么简单。

生活中到处都是这个思想：- 物质由元素组成 (元素周期表) - 颜色由三原色组成 (RGB) - 音乐由音符组成 (Do Re Mi Fa So La Ti) - 句子由单词组成 - 程序由函数组成

信号也一样。任何一个复杂信号，都可以写成一堆简单信号的加权和。

关键问题是：选什么作为”简单信号”？

1.4 一句话记忆

复杂信号 = 简单成分的叠加。分析信号，就是找出它的”成分清单”。

0.3.3 2. 找到”基本砖块”：正弦波

2.1 用什么砖块来盖房子？

如果我们想把任意信号拆开，第一个问题就是：用什么作为基本砖块？

你可以用很多种砖块：- 用脉冲（一个尖峰）作为砖块 — 这就是卷积的思路（Part 1 讲过）- 用台阶作为砖块 - 用抛物线作为砖块

但这些都完美。因为选了它们之后，分析系统行为还是很难。

我们需要一种砖块，它必须满足一个关键性质：

如果一个系统是 LTI（线性时不变），那么当正弦波输入进去，出来的还是正弦波。

2.2 这是最重要的洞察

这也是整个 Part 2 最重要的一句话：

正弦波是 LTI 系统的”特征函数”。

什么意思？想象一个特别的函数 $f(t)$ ，你把它丢进一个 LTI 系统，出来的结果是 $f(t)$ 的”缩放版”（幅度变了）和”平移版”（相位变了），但形状完全不变。

如果用数学写：

$$\cos(\omega t) \xrightarrow{\text{LTI 系统}} |H(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$$

翻译成成人话：- 输入：一个特定频率 ω 的余弦波 - 输出：同样频率 ω 的余弦波 - 幅度变了（乘以 $|H(j\omega)|$ ）- 时间位置变了（加上 $\angle H(j\omega)$ ）

频率没有变！这是关键。

2.3 类比：棱镜与白光

如果你有一束白光（复杂的），把它射进三棱镜，会发生什么？

白光 -> 棱镜 -> 彩虹（红橙黄绿蓝靛紫）

三棱镜把”复杂”的白色光，分解成了”简单”的不同颜色的光。

在信号世界里，傅里叶分析就是那个棱镜：- 输入：复杂的信号 - 输出：各个频率的分量

白光由不同颜色的光组成 <-> 信号由不同频率的正弦波组成

不同的频率就像不同的颜色。低频像红色，高频像紫色。

2.4 为什么正弦波这么特殊？

这就涉及到微分方程了 — 但别怕，我们用直觉理解。

很多物理系统可以用微分方程描述。正弦波有一个奇妙的性质：对它求导（或者积分），还是正弦波。

- $\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega \cos(\omega t)$ —— 还是正弦波（只是变成了余弦）
- $\frac{d}{dt} \cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t)$ —— 还是正弦波（带负号）

而 LTI 系统做的事，本质上就是：加、乘常数、微分、积分。这些操作对正弦波来说，都不会改变它的频率。

这就解释了为什么正弦波经过 LTI 系统后，频率不变。

2.5 一句话记忆

正弦波是 LTI 系统的“自然语言”——系统对它“无话可说”，只能调整大小和位置，改变不了它原本的样子。

0.3.4 3. 第一步：周期信号的分解（傅里叶级数）

3.1 什么是“周期”？

周期信号就是重复的信号。

比如：- 心跳：一直重复“咚哒咚咚哒...” - 钟摆：一直左右摇摆 - 交流电：50Hz，每秒重复 50 次 - 一个音符：弦的振动是周期性的

数学上，周期信号满足：

$$x(t+T) = x(t)$$

其中 T 是周期。比如 50Hz 交流电的 $T = 1/50 = 0.02$ 秒。

3.2 核心思想：任何周期信号都能拆成正弦波

这是那个让傅里叶名垂青史的发现：

任何周期信号（只要不太“离谱”），都可以写成无数个不同频率正弦波的加权和。

数学形式：

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

等等，别被公式吓到。我们来翻译它：- ω_0 — 基频（就是信号重复的基本频率， $\omega_0 = 2\pi/T$ ） - $n\omega_0$ — 倍频（ $2\omega_0$ 是 2 倍频， $3\omega_0$ 是 3 倍频...） - a_0 — 直流分量（平均值） - a_n, b_n — 权重（代表每个频率有多少）

说白了：一个周期信号 = 基频 + 2 倍频 + 3 倍频 + ... 的叠加。

3.3 例子：方波 = 正弦波的“叠罗汉”

想象一个方波（在 -1 和 +1 之间来回跳）。

傅里叶告诉我们：

$$\text{方波} = 1 \times \sin(t) + 1/3 \times \sin(3t) + 1/5 \times \sin(5t) + 1/7 \times \sin(7t) + \dots$$

让我们看看这有多酷：

只加第一项: ~~~ 一个正弦波, 完全不是方波
 加前两项: ~~~~ 开始像了, 边缘有点变陡
 加前三项: ~~~~~ 更像了, 边缘更陡
 加前四项: ~~~~~~ 几乎就是方波了!
 加无限项: ----- 完美方波

我们可以用 ASCII 画出来, 看看叠加的效果:

sin(t) 单独:

```
..      ..      ..
\-----\-----\
```

sin(t) + sin(3t)/3:

```
..      ..      ..      ..
 \-----\-----\-----\
```

sin(t) + sin(3t)/3 + sin(5t)/5:

顶部开始变平, 边缘变陡

继续加到第N项:

顶部越来越平, 边缘越来越陡

最终 ->

```
+-----+ +-----+ +-----+
|       | |       | |       |
+-----+ +-----+ +-----+
```

这就是傅里叶级数的魔法: 用正弦波”拼”出任何形状!

3.4 系数 a_n, b_n 是什么意思?

每个系数代表”信号中这个频率的分量有多少”。

- a_n 大 -> 这个频率的余弦成分多
- b_n 大 -> 这个频率的正弦成分多
- 某个 n 的系数为 0 -> 信号中没有这个频率的分量

这就像问: 这杯果汁里有多少橙汁? 多少苹果汁? 系数就是”每种成分的含量”。

3.5 更优雅的写法: 指数形式

工程上更喜欢用另一种写法 (别怕, 只是换个马甲):

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

这里用了欧拉公式: $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ 。

本质上和一式一样, 只是写法更紧凑。 c_n 就是”频率为 $n\omega_0$ 的分量有多少”。

不用记住这个，只要知道： c_n 告诉我们信号在第 n 个频率上有多少“能量”。

3.6 一句话记忆

周期信号 = 基频 + 整数倍频的正弦波叠加。方波看起来“方”，是因为无数个正弦波“叠”在一起的结果。

0.3.5 4. 第二步：非周期信号的分解（傅里叶变换）

4.1 大多数信号都不是周期的

真实世界中的信号很少是完美周期的：- 你说的一句话（不是重复的）- 一首歌（有开始有结束）- 一次地震的波形 - 一张图片

这些信号不重复，怎么用傅里叶级数？

答：把它们当成周期无限大的信号。

4.2 核心思想：从离散频率到连续频率

周期信号的频率是“离散的”：只有 $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$

非周期信号呢？所有频率都可能存在。

想象你从远处看一把梳子：- 周期信号 -> 梳子的齿（离散的点，隔一段距离一个）- 非周期信号 -> 梳子靠太近了，连成了一片（连续）

这就是傅里叶变换：

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

公式看起来很吓人。但它的意思是：

对于每一个频率 ω ，算一下信号 $x(t)$ 中“含有”多少这个频率的成分。

输出 $X(j\omega)$ 是一个函数，它告诉你：信号在每个频率 ω 上有多大的分量。

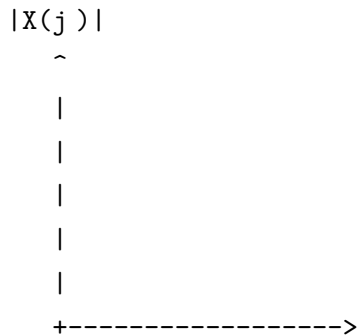
4.3 从级数到变换的“思想飞跃”

傅里叶级数	傅里叶变换
只适用于周期信号	适用于任何信号
频率是离散的（跳着来）	频率是连续的
输出是一堆系数 c_n	输出是一个连续函数 $X(j\omega)$
像清单	像连续曲线

不要纠结积分怎么算。傅里叶变换的意义大于它的计算。就像你不需要知道引擎怎么造，也能开车一样。

4.4 还原本质: $X(j\omega)$ 到底长什么样?

通常用频谱图来表示——横轴是频率 ω , 纵轴是”幅度” (这个频率的分量有多大)。



低频成分多 -> 左边高 高频成分多 -> 右边高

比如: - 低音提琴的声音 -> 低频部分高 - 小提琴的声音 -> 高频部分高 - 白噪音 -> 所有频率都有

4.5 逆傅里叶变换: 从频域回到时域

如果傅里叶变换是”提取成分”, 那逆变换就是”组装回去”:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

也就是说: 把每个频率的分量加起来, 就恢复了原始信号。

就像用完了棱镜, 再把彩虹合回白光。

4.6 一句话记忆

傅里叶变换: 打开信号, 看它的”频率成分清单”——每个频率有多少, 一清二楚。

0.3.6 5. 直观理解频域

5.1 时域和频域是什么关系?

你看到一个信号有两种方式:

时域: 横轴是时间, 看信号”怎么变”。频域: 横轴是频率, 看信号”有什么成分”。

同一个信号, 两种看法。

5.2 类比: 食谱 vs. 食材清单

想象你做一道菜 (比如红烧肉):

时域视角 (食谱): 1. 切肉 (第 0-5 分钟) 2. 焯水 (第 5-8 分钟) 3. 炒糖色 (第 8-12 分钟) 4. 加料炖煮 (第 12-60 分钟) 5. 收汁 (第 60-65 分钟)

这是过程的描述——随时间变化。

频域视角 (食材清单): - 五花肉 500g - 酱油 3 勺 - 冰糖 20g - 八角 2 颗 - 桂皮 1 段 - 料酒 2 勺

这是成分的描述——不管顺序，只管“有什么”。
时域和频域，描述的是同一个东西，只是方式不同。

5.3 更形象的类比

场景	时域（随时间怎么变）	频域（有什么成分）
音乐	旋律随时间展开	音符的和弦构成
食物	菜谱步骤	食材清单
颜色	涂颜色的顺序	RGB 值
说话	一句话	你用到的词汇
照片	像素排列	颜色频率分布

5.4 转换的代价

时域和频域可以互相转换。但——完美的时域信息 = 完全不知道频域，反过来也一样。

想象一个信号：它只在瞬间有一个脉冲。在时域上看，它“很清楚”（就在这里）。在频域上看，它包含所有频率（每个频率都有）。

反过来：一个纯正弦波（只有一个频率）-> 在时间上永远重复（没有时域定位）。

这就是量子力学中的不确定原理的数学根源！

信号不能同时在时域和频域上都被精确定位。

5.5 一句话记忆

时域 = “怎么做”，频域 = “用什么做”。同一盘菜，两种视角。

0.3.7 6. 为什么频域分析这么有用？

6.1 卷积很麻烦

在 Part 1 中我们讲过，LTI 系统的输出 = 输入和冲激响应的卷积：

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

积分里套着函数，还要翻转、移位... 手动算卷积很痛苦，直觉上也不好理解。

6.2 频域魔法：卷积变乘法

这可能是信号与系统最有用的一个性质：

时域的卷积 = 频域的乘法

用数学写：

$$x(t) * h(t) \xrightarrow{\text{傅里叶变换}} X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

不信？这就是真的。

时域：x(t) -----> [卷积 * h(t)] -----> y(t)

v 傅里叶变换

频域：X(j) -----> [乘以 H(j)] -----> Y(j)

这意味着什么？

- 在时域分析系统：要做复杂的卷积
- 在频域分析系统：只要做简单的乘法

这里乘一下就行了！不用积分了！

6.3 系统的”性格”：频率响应 $H(j\omega)$

$H(j\omega)$ 叫频率响应。它告诉系统对每个频率”是什么态度”。

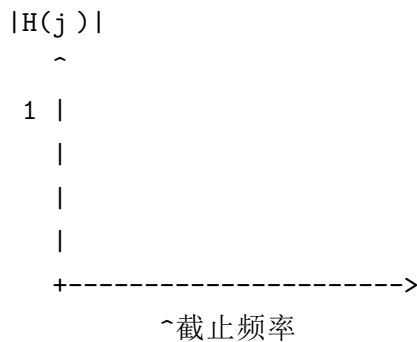
$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$$

两部分：- $|H(j\omega)|$ — 幅频响应：系统对每个频率的”放大倍数” - $\angle H(j\omega)$ — 相频响应：系统对每个频率的”时间延迟”

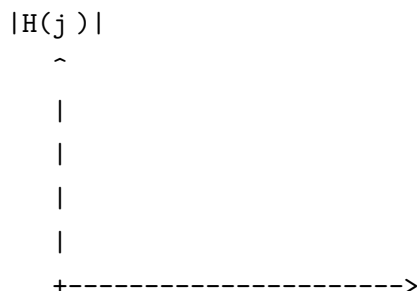
$H(j\omega)$ 就是系统的”个性签名”。每个系统都有自己独特的频率响应。

6.4 滤波器：系统对不同频率的”态度”

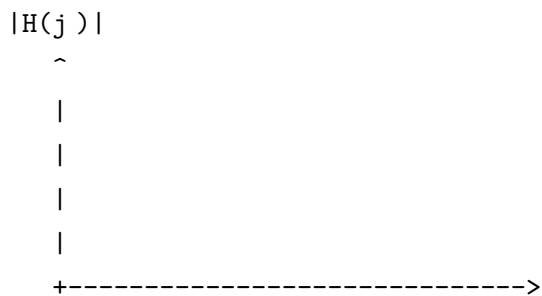
低通滤波器：让低频通过，阻止高频



高通滤波器：让高频通过，阻止低频



带通滤波器：只让某个范围的频率通过



6.5 现实中的类比：筛子

低通滤波器 = 面粉筛 - 低频（小颗粒） -> 通过 - 高频（大颗粒） -> 被拦住

高通滤波器 = 只让大颗粒通过的筛子（反过来用） - 低频（小颗粒） -> 漏下去 - 高频（大颗粒） -> 留下来

带通滤波器 = 有特定大小孔洞的筛子 - 太小或太大 -> 过不去 - 正好合适的 -> 通过

6.6 现实中的应用

声音的 EQ（均衡器）： - 低音（低频） -> 让声音” 厚重” - 中音（中频） -> 让人声清晰 - 高音（高频） -> 让声音” 明亮”

EQ 就是调整不同频率的” 权重” — 本质上是在修改一个滤波器的频率响应。

图像处理： - 图像也可以做傅里叶变换（二维的） - 图像的” 低频” = 平滑区域（天空、皮肤） - 图像的” 高频” = 边缘、细节、噪点 - 低通滤波 -> 模糊（去掉细节） - 高通滤波 -> 边缘检测

通信系统： - 不同的电台使用不同的频率 - 你的收音机就是一个带通滤波器，调到哪个频率就” 打开” 哪个信号的通道 - 这就是频分复用（FDMA）的基础

6.7 一句话记忆

频域分析把人脑不擅长的卷积，变成了人脑擅长的乘法。滤波器就是” 频率筛子”。

0.3.8 7. 采样定理（直观版）

7.1 数字时代怎么存信号？

现实中的信号是连续的（模拟的）。但计算机只能处理离散的（数字的）。

要把模拟信号变成数字信号，我们得采样 — 每隔一段时间记录一个值。

问题来了：采多快才够？

原始连续信号：

~~~~~

采样结果（太慢 —— 信息丢失）：

.....

采样结果（适中 —— 刚好）：

~.~.~.~.~.~.~.~.~.

采样结果（足够快 —— 完美）：

~~~~~

7.2 采样定理（奈奎斯特定理）

香农和奈奎斯特告诉我们：

采样频率必须大于信号最高频率的 2 倍。

$$f_s > 2f_{max}$$

其中：- f_s — 采样频率（每秒采多少个点） - f_{max} — 信号中的最高频率
 如果满足这个条件，就可以从采样值完美恢复原始信号。
 如果违反这个条件... 就会出问题。

7.3 如果采样太慢：混淆（Aliasing）

采样太慢会怎样？高频信号会伪装成低频信号。

最经典的例子：车轮倒转

想象你在看一辆车的轮子（假设轮子有辐条）。如果轮子转得很快，视频的采样率（比如每秒 24 帧）跟不上：

现实：轮子顺时针转，每秒转 10 圈采样：每秒只拍 24 张照片

结果：在视频里，轮子看起来在倒转！

为什么？因为采样频率不够，高频的旋转被”混淆”成了低频的。

这就是 Aliasing（混叠/混淆）。

7.4 更多 Aliasing 例子

老电影中的马车轮：- 车轮辐条看起来在倒转 - 甚至看起来不转了（当转速恰好是采样率的整数倍时）

莫尔条纹（Moiré pattern）：- 两张细密的网格叠加时，出现奇怪的大波纹 - 本质是空间域的”aliasing”

音频采样的混叠：- 录制高频声音时采样率不够 - 高频被”折叠”到可听范围，变成难听的噪音 - CD 的采样率是 44.1kHz——可以覆盖人耳能听到的最高频率（约 20kHz）的 2 倍以上

7.5 实际工程怎么处理？

实际系统中，采样前必须做一件事：

在采样之前，先用一个低通滤波器把高于 $f_s/2$ 的频率滤掉。

这个滤波器叫抗混叠滤波器 (anti-aliasing filter)。

为什么？因为现实信号中总有各种高频噪声，不提前滤掉，采样后它们会“伪装”成低频信号混进来——而且混进来就无法去除了！

7.6 一句话记忆

采样像拍照：要想抓住快速变化的东西，快门必须够快。不然高频就会“伪装”成低频骗过你。

0.3.9 8. 傅里叶思想的局限

8.1 傅里叶变换不是万能的

傅里叶变换很强大，但它有个前提：

傅里叶变换假设信号是绝对可积的： $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

翻译成成人话：信号的能量是有限的，不能无限增长。

但现实中有很多信号不是这样的： $-e^{at}$ (当 $a > 0$, 随时间越来越大的信号) - 持续增长的斜坡信号 - 不稳定系统的输出

8.2 什么是不稳定系统？

稳定的系统：

输入一个小扰动 -> 输出最终归于平静

(就像：推一下钟摆，它摆几下后停下来)

不稳定的系统：

输入一个小扰动 -> 输出越来越大

(就像：推一下多米诺骨牌，整排都倒了)

傅里叶变换分析不了不稳定系统，因为系统的响应增长到无穷大，没有有限的“频谱”。

8.3 这时候需要拉普拉斯

拉普拉斯变换 = 傅里叶变换的“增强版”。

它在 $e^{-j\omega t}$ 前面加了一个“衰减因子” $e^{-\sigma t}$ ：

$$e^{-j\omega t} \rightarrow e^{-(\sigma+j\omega)t} = e^{-\sigma t}$$

这个 σ (衰减因子) 就像一个“镇定剂”，让那些增长过快的信号也能被分析。

傅里叶变换是拉普拉斯变换的一个特例 (当 $\sigma = 0$ 时)。

8.4 一句话记忆

傅里叶只管”稳定”的信号，遇上”炸了”的系统，拉普拉斯来救场。

0.3.10 总结：Part 2 核心知识点卡片

Part 2 核心知识点卡片	
核心思想：复杂信号 = 简单正弦波的叠加	
1. 为什么是正弦波？	
-> LTI系统对正弦波的响应还是正弦波（只是幅度相位变了）	
2. 周期信号 -> 傅里叶级数	
-> 频率是离散的（基频 + 倍频）	
-> 方波 = $\sin(t) + \sin(3t)/3 + \sin(5t)/5 + \dots$	
3. 非周期信号 -> 傅里叶变换	
-> 频率是连续的	
-> $X(j)$ 告诉"每个频率有多少"	
4. 频域为什么有用？	
-> 卷积变乘法 ($x(t)*h(t) \leftrightarrow X(j) \cdot H(j)$)	
-> 系统用 $H(j)$ 描述对不同频率的"态度"	
-> 滤波器 = 频率筛子	
5. 采样定理	
-> $f_s > 2 \cdot f_{max}$	
-> 不够快 -> Aliasing（高频伪装成低频）	
6. 傅里叶的局限	
-> 搞不定不稳定的系统	
-> Part 3 用拉普拉斯来解决	

0.3.11 预备知识清单

在进入 Part 3 之前，确保你理解这些概念：

- 正弦波经过 LTI 系统后, 频率不变 (只变幅度和相位)
- 任何周期信号都能写成不同频率正弦波的叠加
- 傅里叶级数 = 周期信号的”成分清单”
- 傅里叶变换 = 非周期信号的”成分清单”
- 时域和频域是同一个信号的两种视角
- 时域的卷积 = 频域的乘法
- 低通/高通/带通各自的”态度”是什么
- 采样频率必须大于最高频率的 2 倍
- Aliasing 是啥, 为啥要避免

0.3.12 Part 3 预告

傅里叶变换搞不定的, 拉普拉斯来搞定。

Part 3 我们会看到: 1. 傅里叶变换的局限 -> 为什么需要”增强版” 2. 拉普拉斯变换: 给信号加一个”衰减因子” 3. 从频域到复频域: 频率变成了复数 4. 用拉普拉斯分析系统: 稳定性的终极判据 5. 零极点图: 一眼看出系统的”性格”

Part 3 标题: 《推广的变换: 拉普拉斯思想》

傅里叶让你看清信号的成分, 拉普拉斯让你看清系统的本质。

0.4 Part 3: 推广变换 —— 当傅里叶不够用时

核心问题: 傅里叶变换搞不定的情况怎么办? 如何分析系统的”性格”(稳定性)?

0.4.1 0. 从 Part 2 的末尾说起

在 Part 2 里, 我们学会了一个超级好用的思想:

任何信号都可以分解成不同频率的正弦波。

傅里叶变换给了我们一副”频谱眼镜”。你可能会觉得: “太好了, 所有问题都解决了!” 且慢。

试试用傅里叶变换分析这两个信号:

1. 衰减信号: $x(t) = e^{-2t}u(t)$
2. 增长信号: $x(t) = e^{2t}u(t)$

对于信号 1, 傅里叶完美工作。但对于信号 2...傅里叶变换”爆炸”了——积分发散, 结果不存在!

为什么会这样? 我们又该怎么办? 这就是 Part 3 要回答的问题。

0.4.2 1. 傅里叶变换的局限

问题: 傅里叶变换是万能的吗?

回到傅里叶变换的定义:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

它在说: 把信号 $x(t)$ 乘以不同频率的旋转因子 $e^{-j\omega t}$, 然后加起来 (积分)。

问题是: $e^{-j\omega t}$ 的幅度永远是 1 ($|e^{-j\omega t}| = 1$)。它像一个”振幅固定的搅拌器”——不管信号多大, 力气都一样。如果信号在快速增长 (比如 e^{2t}), 积分就会越积越大, 最后发散到无穷大。

核心思想: 傅里叶的”阿喀琉斯之踵”

傅里叶变换有三个”搞不定”的情况:

问题 1: 增长信号 - $x(t) = e^{at}u(t)$ ($a > 0$), 积分发散 -> 傅里叶变换不存在

问题 2: 初始条件 - 打开开关, 电路开始响应, 起始时刻很关键 - 但傅里叶从 $-\infty$ 积分到 $+\infty$, ”忘记”了起始时刻 - 结论: 不适合”有起点”的问题

问题 3: 系统稳定性 - 傅里叶只能告诉你系统对不同频率的响应 - 但不能直接告诉你: 这个系统会不会自爆? - 结论: 傅里叶看不到系统的”性格”

直观理解: 为什么需要新工具?

想象你在开车: 傅里叶擅长分析”稳定运行”的状态, 但不擅长分析”刚开始”和”会不会出事”的问题。

场景	傅里叶行	傅里叶不行
平坦路面 (稳态)	分析振动频率	—
突然踩刹车 (瞬态)	—	分析刹车后响应
方向盘抖动	—	判断车会不会翻

一句话记忆

傅里叶变换只适用于”温和”的信号 (绝对可积), 遇到增长信号或需要分析稳定性时, 它就不够用了。

0.4.3 2. 核心思想：加一个”衰减因子”

问题：如何驯服发散的信号？

傅里叶变换的”搅拌器” $e^{-j\omega t}$ 幅度是 1，压不住快速增长信号。那...换个能压住的呢？

核心思想：先压住，再分解

既然信号增长太快，那就先乘一个快速衰减的指数，把它”按下去”，然后再做傅里叶变换。

具体来说：

1. 原始信号： $x(t)$
2. 乘以衰减因子： $x(t) \cdot e^{-\sigma t}$ ($e^{-\sigma t}$ 快速衰减到 0)
3. 再做傅里叶变换：对”被压住”的信号做傅里叶

数学上，完整的公式就是：

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

整理一下：

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

恭喜，这就是拉普拉斯变换！

直观理解：用”重锤”压住气球

想象一个气球正在快速上升（增长信号）：

1. 傅里叶变换的做法：用手轻轻托住气球 -> 托不住，气球飞走了（积分发散）
2. 拉普拉斯变换的做法：用一个重锤压在气球上 -> 气球被按住了，可以慢慢分析

这个”重锤”就是 $e^{-\sigma t}$ 。

σ 越大，重锤越重，能压住的信号越多。但如果 σ 太大，连有用的信号都被压没了——所以选择合适的 σ 是一门艺术。

简化符号

为了书写方便，我们定义一个新的变量：

$$s = \sigma + j\omega$$

于是拉普拉斯变换变成：

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

这就是拉普拉斯变换的定义式。

其中 s 叫做”复频率” (complex frequency), 因为它同时包含了: - 实部 σ : 控制衰减或增长的速度 - 虚部 ω : 控制振荡的频率

一句话记忆

拉普拉斯变换 = 先加衰减因子压住信号 + 再做傅里叶变换。它比傅里叶多了”一个 σ “, 但威力大了十倍。

0.4.4 3. s 域到底是什么?

问题: $s = \sigma + j\omega$ 是什么东西?

如果你之前没见过复数, 可能会觉得 $s = \sigma + j\omega$ 很吓人。

别怕, 我们把它拆开看:

核心思想: s 是”复频率”, 同时描述增长/衰减和振荡

在 Part 2 中, 我们用频率 ω 描述信号——它只告诉信号振荡得多快。

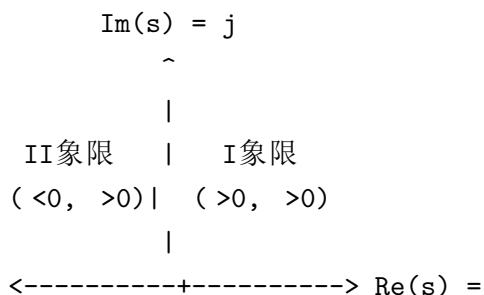
现在用 s , 我们能同时描述两件事: - σ (实部): 信号是增长还是衰减? (增长多快? 衰减多快?) - ω (虚部): 信号振荡得多快?

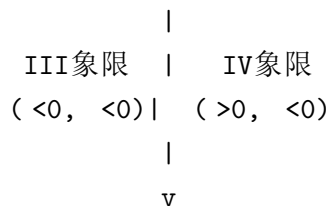
把两者合起来, 就能描述各种复杂的信号行为:

信号行为	σ 取值	ω 取值	举例
纯衰减	负值	0	e^{-2t}
纯增长	正值	0	e^{3t}
等幅振荡	0	非零	$\cos(\omega t)$
衰减振荡	负值	非零	$e^{-2t} \cos(\omega t)$
增长振荡	正值	非零	$e^{2t} \cos(\omega t)$
常数	0	0	1

s 平面: 信号的”地图”

把 s 画在一个平面上, 就是 s 平面:



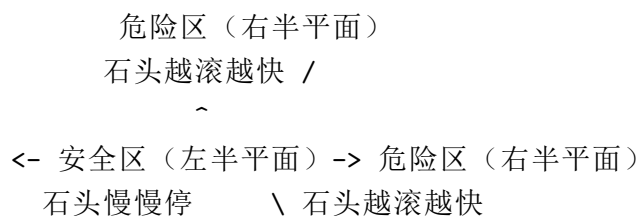


这个平面上的位置，决定了信号的”命运”：

- 左半平面 ($\sigma < 0$)：信号随时间衰减 -> 稳定
 - 越靠左，衰减越快
 - 例子： e^{-5t} 在 $\sigma = -5$
- 右半平面 ($\sigma > 0$)：信号随时间增长 -> 不稳定
 - 越靠右，增长越快，越危险
 - 例子： e^{5t} 在 $\sigma = +5$
- 虚轴上 ($\sigma = 0$)：信号等幅振荡 -> 临界稳定
 - 既不会衰减也不会增长
 - 例子： $\cos(\omega t)$ 在 $s = j\omega$

直观理解：s 平面 = “命运的罗盘”

想象一座山，从山顶往下滚石头：



- 左半平面 = 山谷 (任何扰动都会平息)
- 右半平面 = 山顶 (任何扰动都会被放大)
- 虚轴 = 平地 (扰动既不放大也不缩小)

从另一个角度看：s 的”食谱”

每种基本信号在 s 域都有对应的”配方”：

时域信号	s 域表示	在 s 平面的位置
$\delta(t)$ (冲激)	1	处处存在
$u(t)$ (阶跃)	$\frac{1}{s}$	$s=0$ 处有个”极点”
$e^{-at}u(t)$ (衰减)	$\frac{1}{s+a}$	$s=-a$ 处有个”极点”
$\sin(\omega_0 t)u(t)$ (振荡)	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$s=\pm j$ 处有极点

可以看到，每种基本信号的”特征”都对应 s 平面上的某个特殊位置。这些特殊位置叫做”极点”——我们后面会详细讲。

一句话记忆

s 平面是一张”命运的罗盘”：左半平面代表稳定（衰减），右半平面代表不稳定（增长），虚轴上代表临界（等幅振荡）。

0.4.5 4. 为什么说拉普拉斯变换”把微分变乘法”？

问题：解微分方程为什么这么痛苦？

在信号与系统中，系统通常用微分方程描述。

比如一个 RC 电路：

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

(输入 $x(t)$ ，输出 $y(t)$)

要解这个方程，你需要：1. 解齐次解（自然响应）2. 找特解（强制响应）3. 代入初始条件确定常数

这就像在做手工——每一步都需要技巧，容易出错，而且每换一个输入就要重新算一遍。

核心思想：变换域 = “计算的快捷键”

拉普拉斯变换最强大的地方在于这几个变换规则：

时域操作	s 域操作
微分 $\frac{dx}{dt}$	$sX(s) - x(0)$
二阶微分 $\frac{d^2x}{dt^2}$	$s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$
积分 $\int x(t)dt$	$\frac{X(s)}{s}$
卷积 $x(t) * h(t)$	$X(s) \cdot H(s)$

看到了吗？ - 时域的微分 -> s 域的乘法（乘以 s） - 时域的卷积 -> s 域的乘法（乘以 H(s)） - 时域的积分 -> s 域的除法（除以 s）

微积分运算 -> 变成了代数运算！

直观理解：用计算器代替心算

想象你手算 123×456 ：

- 手工（时域）： $123 \times 400 + 123 \times 50 + 123 \times 6$ ，需要进位、对齐...很麻烦
- 计算器（s 域）：按几个键，结果就出来了

拉普拉斯变换就是这个”计算器”——它把繁琐的微分方程变成了简单的代数方程。更妙的是，初始条件（ $x(0)$ 、 $x'(0)$ 等）自动被包含进去了，不需要额外处理。

看一个具体例子：RC 电路

时域的微分方程：

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

对两边做拉普拉斯变换：

$$RC[sY(s) - y(0)] + Y(s) = X(s)$$

整理：

$$(RCs + 1)Y(s) - RC \cdot y(0) = X(s)$$

$$Y(s) = \frac{X(s)}{RCs + 1} + \frac{RC \cdot y(0)}{RCs + 1}$$

左边是输入的影响，右边是初始条件的影响——分得清清楚楚，明明白白！

一句话记忆

拉普拉斯变换把”难搞的微分方程”变成了”简单的代数方程”——微积分变乘法，这就是它最强大的地方。

0.4.6 5. 系统函数 $H(s)$ 和稳定性

问题：如何一眼看出系统会不会”自爆”？

回到 Part 2，我们学到一个重要的概念——频率响应 $H(j\omega)$ ：

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

它告诉系统对不同频率的输入会怎么响应。

但问题来了： $H(j\omega)$ 只告诉你”稳定运行时”的情况。

如果系统本身不稳定——给它一个小小扰动它就爆炸—— $H(j\omega)$ 是看不出来的。

怎么办？

核心思想：用 $H(s)$ 看系统的”基因”

在 s 域，同样有系统函数：

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$H(s)$ 包含了系统的全部信息——不仅包括稳定状态，还包括系统的”内在性格”。

$H(s)$ 的构成

任何实际系统的 $H(s)$ 都可以写成两个多项式相除的形式：

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

比如一个二阶系统：

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

极点：系统的”性格基因”

极点就是让分母 $D(s) = 0$ 的那些 s 值。

比如 $H(s) = \frac{1}{s+2}$ ，分母 $s + 2 = 0$ ，所以极点在 $s = -2$ 。

$H(s) = \frac{1}{s^2+2s+5}$ ，解 $s^2 + 2s + 5 = 0$ ，得到 $s = -1 \pm 2j$ ，所以两个极点分别在 $-1 + 2j$ 和 $-1 - 2j$ 。

极点的位置决定稳定性

这是整个信号与系统最重要的结论之一：

极点全部在左半平面 -> 稳定

有任何极点在右半平面 -> 不稳定

极点恰好在虚轴上 -> 临界稳定

三个例子感受一下：

系统	极点位置	冲击响应	结论
$H(s) = \frac{1}{s+5}$	$s = -5$ (左半平面)	$e^{-5t}u(t)$ 衰减到 0	稳定
$H(s) = \frac{1}{s-3}$	$s = 3$ (右半平面)	$e^{3t}u(t)$ 爆炸	不稳定
$H(s) = \frac{1}{s^2+4}$	$s = \pm 2j$ (虚轴)	$\sin(2t)u(t)$ 等幅振荡	临界稳定

直观理解：极点是系统的”按钮”

想象一个音响系统：

- 左半平面的极点 = 音响的”降噪按钮”
 - 按一下，声音逐渐消失 -> 系统恢复平静
 - 越靠左，消失得越快
- 右半平面的极点 = 音响的”啸叫按钮”
 - 按一下，声音越来越大 -> 系统自激振荡（就像麦克风靠近喇叭时那种刺耳的声音）
 - 越靠右，啸叫来得越快
- 虚轴上的极点 = 音响的”循环播放按钮”
 - 按一下，就一直唱下去，不会停

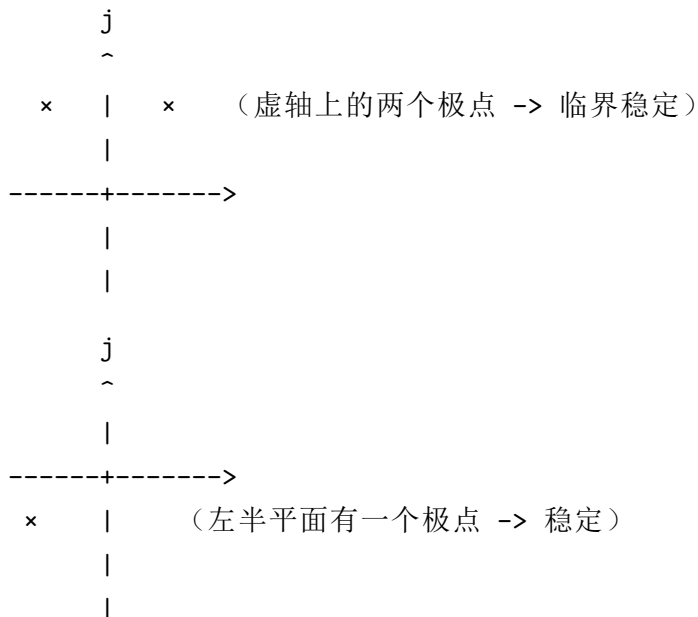
所以看系统是否稳定，就是在 s 平面上找极点——只要有一个极点在右半平面，系统就会”啸叫”（不稳定）。

零点和极点一起看

除了极点， $H(s)$ 的分子 $N(s) = 0$ 的解叫做零点。

- 零点：让 $H(s) = 0$ 的 s 值
- 极点：让 $H(s) \rightarrow \infty$ （趋向无穷大）的 s 值

在 s 平面上，通常用 \circ 表示零点，用 \times 表示极点：



如果一个系统的极点在右半平面，工程师会说：“这个系统有右半平面极点，不稳定，需要加反馈补偿。”

一句话记忆

系统的稳定性完全由极点在 s 平面的位置决定：左半平面 = 稳定，右半平面 = 不稳定，虚轴 = 临界。看极点位置，就知道系统会不会”自爆”。

0.4.7 6. s 域 vs 频域：两张”地图”的关系

问题： $H(s)$ 和 $H(j\omega)$ 是什么关系？

如果你已经熟悉了 Part 2 中 $H(j\omega)$ (频率响应) 的概念，现在又来了个 $H(s)$ ，你可能想问：这两个东西到底是什么关系？是不是有两个不同的系统函数？

核心思想： $H(s)$ 是完整的”地图”， $H(j\omega)$ 是其中一条”路”

答案很简洁：

$H(s)$ 是更一般的系统函数。当 s 沿着虚轴走（即 $s = j\omega$ ）， $H(s)$ 就变成了 $H(j\omega)$ 。

换句话说：

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$$

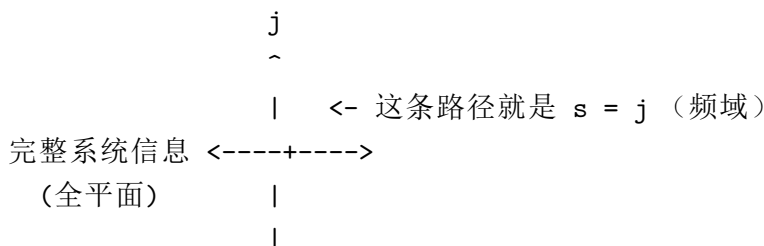
频域只是 s 域的一个”截面”。

直观理解：看一栋楼 vs 看一层楼

- $H(s)$ (s 域) = 整栋楼的建筑图纸 (完整的结构信息)
- $H(j\omega)$ (频域) = 其中某一层的平面图 (只看某一层的结构)

当你只关心”稳态频率响应”时，你只需要看 $H(j\omega)$ (只看一层)。但当你需要了解系统的全部行为 (包括稳定性、瞬态响应)，你就需要看完整的 $H(s)$ 。

s 平面视角：



只看虚轴 -> 频率响应 $H(j)$
看整个平面 -> 完整系统函数 $H(s)$

什么时候用哪个?

场景	用哪个	原因
分析系统的频率响应 (如设计均衡器)	$H(j\omega)$	需要知道不同频率的增益/衰减
分析系统稳定性	$H(s)$	需要看极点位置
分析系统对初始条件的响应	$H(s)$	s 域自动包含初始条件
分析系统的瞬态行为	$H(s)$	需要完整的时间响应
设计滤波器	$H(j\omega)$	主要关心不同频率的通过/阻隔

一个具体例子

考虑系统 $H(s) = \frac{1}{s+1}$:

从 s 域看: - 极点在 $s = -1$ (左半平面) - 结论: 系统稳定

从频域看 (取 $s = j\omega$):

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

- 低频时 ($\omega \approx 0$): $H(j\omega) \approx 1$ -> 信号通过 - 高频时 ($\omega \rightarrow \infty$): $H(j\omega) \rightarrow 0$ -> 信号被衰减

- 结论: 这是一个低通滤波器

两者结合: 系统既是稳定的, 又对高频有衰减作用——完整的图像!

一句话记忆

$H(s)$ 是完整的系统画像 (包括性格和历史), $H(j\omega)$ 是它的”身份证照片” (只看稳态响应)。频域 = s 域在虚轴上的投影。

0.4.8 7. 实际应用: 电路分析

问题: 为什么电路分析这么烦?

如果你学过电路分析, 一定被电容、电感的微分方程折磨过:

- 电容: $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$
- 电感: $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

每个元件都有自己的微分关系, 一个稍微复杂的电路就要解一堆微分方程。

但在 s 域里, 这一切都变得简单得不可思议。

核心思想：在 s 域，电容和电感变成”电阻”

来看一个神奇的变换：

电容的 s 域模型：

时域： $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$

s 域： $I(s) = C \cdot sV(s)$

整理为： $\frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}$

在 s 域，电容就像一个电阻，阻值是 $\frac{1}{sC}$ ！

电感的 s 域模型：

时域： $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

s 域： $V(s) = L \cdot sI(s)$

整理为： $\frac{V(s)}{I(s)} = sL$

在 s 域，电感也像一个电阻，阻值是 sL ！

直观理解：s 域把电路变成了”电阻网络”

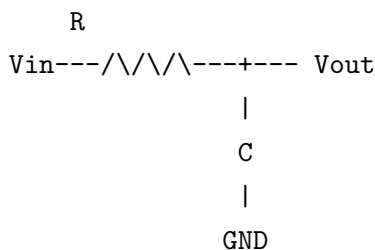
元件	时域关系	s 域阻抗
电阻	$v = iR$	$Z_R = R$
电容	$i = C \frac{dv}{dt}$	$Z_C = \frac{1}{sC}$
电感	$v = L \frac{di}{dt}$	$Z_L = sL$

看到了吗？在 s 域里面，所有元件都变成了”广义电阻”。

- 这意味着：1. 你可以像分析电阻网络一样分析任何电路 2. 串联就加，并联就用倒数加 3. 分压公式、分流公式全部照用 4. 不需要解微分方程！

举例：RC 电路

一个简单的 RC 低通滤波器：



在 s 域，电容变成阻抗 $Z_C = \frac{1}{sC}$ ，电阻还是 R 。

这是一个分压电路：

$$V_{out}(s) = V_{in}(s) \cdot \frac{Z_C}{R + Z_C} = V_{in}(s) \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

整理：

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

这就是 RC 电路的传递函数！

从这个 $H(s)$ 我们可以立刻知道：1. 极点： $s = -\frac{1}{RC}$ （左半平面 \rightarrow 稳定）2. 频率响应： $H(j\omega) = \frac{1}{RC \cdot j\omega + 1}$ （低通滤波）3. 截止频率： $\omega_c = \frac{1}{RC}$
不用解微分方程，不需要复杂的计算，一个分压公式就搞定了！

再举一个：RLC 电路

s 域阻抗串联： $Z = R + sL + \frac{1}{sC}$ ，分压得：

$$H(s) = \frac{1/(sC)}{R + sL + 1/(sC)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

从分母（特征方程）就能看出系统可能的振荡行为。二阶电路在 s 域里依然是简单的代数运算。

一句话记忆

在 s 域里，电容和电感变成了”广义电阻”——微积分变除法/乘法，电路分析变成了电阻网络分析。

0.4.9 8. 回顾与地图：拉普拉斯思想全景

一条线索串起来

让我们回顾整个 Part 3 的逻辑链：

傅里叶变换不够用

v

有的信号增长太快（积分发散）

v

加一个衰减因子 e^{-t} 把信号"压住"

v

$s = \sigma + j\omega$ 诞生了（复频率）

v

拉普拉斯变换 $X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$

v

微分 \rightarrow 乘法（把微分方程变代数方程）

v

系统函数 $H(s) = Y(s)/X(s)$

v

极点的位置决定稳定性

v

s域可以分析：稳定性 + 瞬态 + 稳态

ASCII 知识地图

```

+-----+
|           信号与系统思想地图 • Part 3           |
|           拉普拉斯变换                           |
+-----+
| 时域 (t)           s域 (s =  + j)           |
| -----           -----                   |
| 微分方程           代数方程                   |
| +-----+         +-----+                 |
| |麻烦! |--拉普拉斯---> |简单! |                 |
| +-----+  变换     +-----+                 |
|   ^           |                               |
|   |           |                               |
| 卷 积           乘 法                           |
| x(t)*h(t)       X(s) • H(s)                   |
|   ^           |                               |
|   |           |                               |
| 初始条件           自动包含                       |
| (手动处理)         (自动处理)                   |
|
|           s平面位置说一切                       |
|           +-----+                           |
|           | 极点 ×           |                 |
|           |                   |                 |
|           | 稳定 <- 左 | 右 -> 不稳定           |
|           |                   |                 |
|           | 临界 <- 虚轴 -> 临界                 |
|           +-----+                           |
|
|           电路 <- s域阻抗 (Z_C=1/sC, Z_L=sL)     |
+-----+
| 关键结论: 极点的位置 -> 系统的命运             |
| "左稳右不稳, 虚轴临界"                         |
+-----+

```

0.4.10 9. 一句话总结全章

拉普拉斯变换 = 傅里叶变换 + 衰减因子。它用 s 域（复频率）把微分方程变成代数方程，用极点位置判断系统稳定性。核心口诀：左稳右不稳，虚轴临界。

0.4.11 Part 4 预告：数字世界

我们已经学会了：- Part 2：用傅里叶把连续信号分解成频率成分（频域分析）- Part 3：用拉普拉斯分析系统的稳定性和瞬态行为（ s 域分析）

但你有没有想过一个问题：

计算机是数字的，只能处理 0 和 1 的序列。而我们的信号是连续的（模拟信号）。

计算机怎么分析信号？

计算机不能做积分，计算机不能解微分方程，计算机只能做加法、减法和存储。

所以我们需要一个“数字版本”的傅里叶和拉普拉斯——这就是 Part 4 的主题。

在 Part 4 中，我们将看到：1. 如何把连续信号变成数字序列（采样）2. 计算机怎么“模拟”微积分（差分方程）3. 数字版本的拉普拉斯—— Z 变换 4. 离散傅里叶变换（DFT）和快速傅里叶变换（FFT）

敬请期待 Part 4：离散世界——计算机如何处理信号？

0.5 Part 4：离散世界 — 计算机怎么处理信号？

核心问题：计算机/数字芯片只能处理离散的数据，怎么用数字方式处理信号？

0.5.1 开篇：两个世界的桥梁

到目前为止，我们的故事都在连续世界发生：

- 信号是 $x(t)$ — 每时每刻都有值
- 系统用微分方程描述
- 我们用拉普拉斯变换把微分方程变成代数方程

但是——

打开你的手机。它正在做信号处理：

- 播放音乐（把数字变成声音）
- 打电话（把你的声音变成数字传输）
- 拍照（把光信号变成像素数字）

手机里的芯片能处理 $x(t)$ 吗？

不能。芯片只懂数字：0 和 1。它只能处理一串串的数字。

这就带来了一个根本问题：

怎么在离散的数字世界里，做和连续世界一样的事情？

Part 4 就是回答这个问题的。

0.5.2 1. 为什么需要离散信号？

问题：计算机能直接处理连续信号吗？

想象你在用手机录音：

你的声音（连续声波）

v

麦克风（变成连续电信号）

v

计算机芯片 <- 停！

计算机芯片看着这个连续电信号，完全不知道怎么办。
它说：“你给我一个曲线，但我只能存数字。你让我存什么？”
这就是最原始的矛盾：

- 物理世界是连续的（声音、光、温度都在连续变化）
- 数字世界是离散的（只能存一串数字）

核心思想

离散信号 = 把”连续曲线”变成”一串数字”

直观理解：拍照 vs 录像

- 连续信号 = 录像。每一瞬间都有画面
- 离散信号 = 每隔 1 秒拍一张照片。它丢失了照片之间的信息，但更方便存储和处理

录像（连续） : -----

照片串（离散） : ^ ^ ^ ^ ^ ^

每隔1秒拍一张

现实场景

你手机里的所有信号处理，都是离散的：

场景	连续世界	离散世界（数字芯片）
----	------	------------

录音	声波（空气振动）	一串数字（每秒 44100 个）
----	----------	------------------

场景	连续世界	离散世界 (数字芯片)
拍照	光 (连续电磁波)	像素阵列 (例如 4000×3000)
视频	连续运动	每秒 24/30/60 帧
导航	连续位置变化	每隔 1 秒记录一次 GPS 坐标

一句话记忆

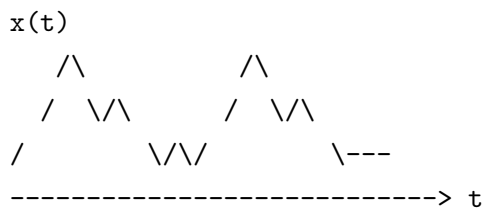
离散信号不是“残缺的连续信号”，而是一种新的、数字世界自己的语言。

0.5.3 2. 采样：从连续到离散的桥梁

问题：怎么把连续信号变成一串数字？

我们现在面临一个实际的问题：

有一个连续信号 $x(t)$ ，怎么让计算机存下它？



计算机说：“我不能存一整条曲线，你每隔一段时间给我一个点，我记下来。”
这就是采样 (sampling)。

核心思想

采样 = 每隔 T_s 秒，取一个值

直观理解：读取体温

假设你发烧了，医生让你每 2 小时量一次体温：

时间	: 0点	2点	4点	6点	8点	10点
体温	: 37.2	37.8	38.5	39.1	38.8	38.0

- T_s (采样周期) = 2 小时 (每隔多久量一次)
- f_s (采样频率) = 0.5 次/小时 (每小时量 0.5 次)

注意: $f_s = 1/T_s$, 它们是倒数关系。

这两个参数就是采样的“节奏”：- 采样周期 T_s : 相邻两个点之间的时间间隔 - 采样频率 f_s : 每秒 (或每单位时间) 取多少个点

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

真实世界：CD 音质

CD 音质的采样频率是 $f_s = 44100$ Hz。

这意味着：每秒取 44100 个点。

1秒的声音

+-----+-----+-----+-----+-----+-----+

44100个点！

为什么是 44100？因为人耳能听到的最高频率大约是 20000 Hz，根据我们马上要学的理论，采样频率必须 最高频率的 2 倍。44100 > 40000，足够了。

采样过程的三个步骤

连续信号 $x(t)$

v

每隔 T_s 秒"咔嚓"一下（像拍照一样）

v

取那个时刻的值

v

得到一串数字： $x[0]$ ， $x[1]$ ， $x[2]$ ， $x[3]$ ，...

数学表示：

$$x[n] = x(nT_s)$$

意思是：离散信号的第 n 个点 = 连续信号在 nT_s 时刻的值。

一句话记忆

采样就是给连续信号"拍照"，每隔 T_s 秒拍一张，得到一串数字。

0.5.4 3. 奈奎斯特采样定理（直观版）

问题：采样多快才够？

采样会丢失信息 — 这是肯定的。两个采样点之间发生了什么，我们永远不知道。

但问题是：如果采样太慢，我们会彻底误解信号。

核心思想

采样频率必须 信号中最高频率的 2 倍。

公式：

$$f_s \geq 2f_{\max}$$

这里的 f_{\max} 是信号中包含的最高频率。

这个“2 倍”频率称为奈奎斯特频率 (Nyquist frequency):

$$f_{\text{Nyquist}} = \frac{f_s}{2}$$

直观理解：看得够快才能看清

想象一个小朋友在转圈：

- 转得慢（低频）：你每秒看 10 次，每次都能看清他在哪个位置
- 转得快（高频）：你每秒还是看 10 次，可能每次都看到他出现在不同的位置，根本看不清他在转

小朋友转圈（低频，每秒转1圈）

你看的频率：每秒10次

结果：每次都能看清位置

小朋友转圈（高频，每秒转10圈）

你看的频率：每秒10次

结果：每次都看到他在不同位置，完全混乱

要看清一个每秒转 10 圈的小朋友，你的“看”速度至少需要每秒 20 次。

这就是“2 倍”的直觉来源：- 一个正弦波有波峰和波谷 - 要确定一个正弦波的频率，至少需要在波峰采一个点，在波谷采一个点 - 这就是每个周期至少 2 个点

正确采样（每秒2个点以上）：

\wedge \wedge
 $/ \quad \backslash \quad \backslash \quad \backslash$

<- 每个波峰和波谷都能采到

采样太慢（每秒不到2个点）：

\wedge \wedge
 $/ \quad \backslash$ $/ \quad \backslash$

<- 完全看不出波形！

混叠 (Aliasing)：采样太慢的后果

当采样频率低于 2 倍最高频率时，高频信号会“伪装”成低频信号。这叫混叠 (aliasing)。

经典例子：马车轮子倒转 西部电影里，马车轮子有时候看起来在倒转。

原因：- 电影的帧率是每秒 24 帧（相当于采样频率 24 Hz）- 车轮的辐条转得很快（高频）- 每帧之间，辐条转动了差不多一整圈，看起来就像在倒转

实际车轮：顺时针快速转动

帧1：辐条在12点方向

帧2：辐条在11点方向（已经转了一圈多一点点）

你看起来：辐条逆时针动了一下 -> 轮子在倒转！

这就是混叠：高频的运动被”伪装”成了低频的运动。

抗混叠滤波器 在实际录音中，录音设备会先做一个操作：

在采样之前，用低通滤波器滤掉所有高于 $f_s/2$ 的频率成分。

这样就能保证采样后的信号不会出现混叠。

原始声音信号

v

低通滤波器（切掉高于 $f_s/2$ 的部分）

v

采样器（现在可以放心采样了）

v

一串数字

一句话记忆

采样频率必须 最高频率的 2 倍，否则高频信号会”伪装”成低频信号（混叠）。

0.5.5 4. 从微分方程到差分方程

问题：离散世界怎么描述系统的”变化”？

在连续世界，我们用微分方程来描述系统的行为：

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$\frac{dy}{dt}$ 表示”在某一瞬间的变化率”。

但在离散世界，没有”瞬间”这个概念。只有一个个孤立的点： $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

相邻两个点之间，什么都没有。

那离散世界怎么表示”变化”？

核心思想

差分 = 离散世界的”导数” 差分方程 = 离散世界的”微分方程”

直观理解：导数 vs 差分

连续世界（导数）：

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

“看一个无穷小时间内的变化率”——这需要极限，需要微积分。

离散世界（差分）：

$$y[n] - y[n - 1]$$

“看相邻两个点之间的差值”——这只需要减法!

连续导数：看无穷小的变化率（需要微积分）

$$dy/dt = \lim(\Delta t \rightarrow 0) [y(t+\Delta t) - y(t)] / \Delta t$$

离散差分：看相邻点的差值（只需要减法）

$$\Delta y[n] = y[n] - y[n-1]$$

三种常用差分

一阶前向差分：

$$\Delta y[n] = y[n + 1] - y[n]$$

一阶后向差分（最常用）：

$$\nabla y[n] = y[n] - y[n - 1]$$

二阶差分（对一阶差分再做差分）：

$$\nabla^2 y[n] = y[n] - 2y[n - 1] + y[n - 2]$$

具体例子：从微分到差分的转换

连续世界的微分方程：

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

转换成离散世界：

$$\frac{y[n] - y[n - 1]}{T_s} + 2y[n] = x[n]$$

整理一下：

$$y[n] - y[n - 1] + 2T_s y[n] = T_s x[n]$$

这就是一个差分方程。

连续世界：

微分方程

v

需要微积分

v

适合理论分析

离散世界：

差分方程

v

只需要加减乘除

v

适合计算机实现

为什么差分方程如此重要？

计算机可以逐点计算差分方程。

假设我们有差分方程：

$$y[n] = x[n] + 0.5y[n - 1]$$

计算机这样执行：

已知： $x[0]$ ， $x[1]$ ， $x[2]$ ，...（输入信号）

假设： $y[-1] = 0$ （初始条件）

计算：

$$y[0] = x[0] + 0.5 \times 0 = x[0]$$

$$y[1] = x[1] + 0.5 \times y[0] = x[1] + 0.5x[0]$$

$$y[2] = x[2] + 0.5 \times y[1] = x[2] + 0.5(x[1] + 0.5x[0])$$

...

每一步只需要：一次乘法 + 一次加法

计算机飞快地做下去...

这就是数字滤波器的本质！你的手机、电脑里的数字音频处理，底层都是这样的差分方程计算。

一句话记忆

差分是离散世界的”导数”，差分方程是离散世界的”微分方程”——把微分变成减法，计算机就能算了。

0.5.6 5. Z 变换：离散世界的”拉普拉斯变换”

问题：离散世界有类似拉普拉斯的工具吗？

回顾连续世界的故事：

微分方程（难解）

v

拉普拉斯变换（两边取变换）

v

代数方程（好解！）

v

解代数方程

v

拉普拉斯反变换

v

得到答案

拉普拉斯变换的魔法：把微积分运算变成乘除法。

那离散世界呢？

我们有差分方程。差分方程虽然没有微积分，但涉及过去的值（比如 $y[n-1]$, $y[n-2]$ ），也不是直接能解的。

能不能有一个类似拉普拉斯的东西，把”延迟”变成乘法？
能！就是 Z 变换。

核心思想

Z 变换 = 离散版的拉普拉斯变换

直观理解：为什么叫”Z”？

先回顾拉普拉斯变换：

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

当我们将采样后的信号做拉普拉斯变换，奇妙的事情发生了...

采样信号： $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s)$

做拉普拉斯变换：

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-snT_s}$$

令 $z = e^{sT_s}$ ，得到：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

这就是 Z 变换！

拉普拉斯 -> Z变换的推导

采样信号 $x_s(t) = \sum x[n] \delta(t - nT_s)$

v 拉普拉斯变换

$X_s(s) = \sum x[n] e^{-snT_s}$

v 令 $z = e^{sT_s}$

$X(z) = \sum x[n] z^{-n}$ <- Z变换！

Z 变换的公式

双边 Z 变换 (也是最常用的形式)：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

其中 z 是一个复数，可以写成极坐标形式：

$$z = re^{j\Omega}$$

- $r = |z|$ ：到原点的距离
- Ω ：角度 (离散角频率)

Z 变换最核心的性质：延迟性质

这是 Z 变换最有用的地方：

$$x[n - 1] \longleftrightarrow z^{-1}X(z)$$

延迟一个时间单位，在 Z 域就是乘 z^{-1} 。

这就像拉普拉斯变换中，微分一次变成乘 s 。

连续世界：		离散世界：
d/dt	--->	延迟一个单位
v		v
乘 s		乘 z^{-1}

例子：用 Z 变换解差分方程

差分方程：

$$y[n] - 0.5y[n - 1] = x[n]$$

两边做 Z 变换（利用延迟性质）：

$$Y(z) - 0.5z^{-1}Y(z) = X(z)$$

整理：

$$Y(z)(1 - 0.5z^{-1}) = X(z)$$

得到系统函数：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

看！差分方程真的变成了代数方程！

差分方程 $y[n] - 0.5y[n-1] = x[n]$

v 两边取Z变换

$$Y(z) - 0.5z^{-1}Y(z) = X(z)$$

v 整理

$$H(z) = Y(z)/X(z) = 1/(1 - 0.5z^{-1})$$

v 有了H(z)就可以分析系统特性了！

s 平面 -> z 平面的映射

$z = e^{sT_s}$ 这个关系，把连续世界的 s 平面映射到了离散世界的 z 平面。

这是最核心的映射关系：

s 平面 (连续)	->	z 平面 (离散)
$s = 0$	->	$z = 1$
$s = j\omega$ (虚轴)	->	$ vertzvert = 1$ (单位圆)

s 平面 (连续) -> z 平面 (离散)

$\sigma < 0$ (左半平面) -> $|vertzvert < 1$ (单位圆内)

$\sigma > 0$ (右半平面) -> $|vertzvert > 1$ (单位圆外)

一句话记忆

Z 变换是离散版的拉普拉斯变换：延迟 -> 乘 z^{-1} ，差分方程 -> 代数方程。

0.5.7 6. z 平面分析 (直观版)

问题：怎么判断一个离散系统是否稳定？

回忆连续世界：

- 拉普拉斯变换的极点 = 系统的”固有频率”
- 极点在左半平面 -> 系统稳定
- 极点在右半平面 -> 系统不稳定
- 虚轴 ($j\omega$) 是稳定和 instability 的分界线

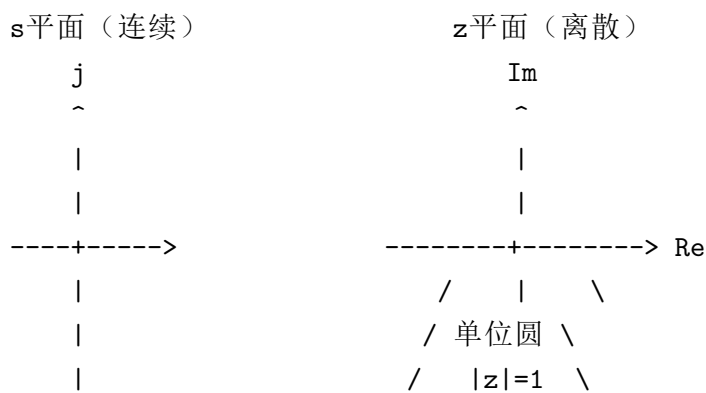
离散世界呢？分界线在哪？

核心思想

离散系统的稳定性看极点是否在单位圆内。

直观理解：单位圆 = 离散世界的”虚轴”

通过 $z = e^{sT_s}$ 这个映射：



虚轴 j -----> 单位圆 |z|=1
 左半平面 -----> 单位圆内部 |z|<1
 右半平面 -----> 单位圆外部 |z|>1

- 单位圆 ($|z| = 1$): 稳定和不稳定的分界线
- 单位圆内 ($|z| < 1$): 稳定区域
- 单位圆外 ($|z| > 1$): 不稳定区域

稳定性判断

步骤: 1. 写出系统函数 $H(z)$ 2. 找出极点 (分母 = 0 的根) 3. 检查所有极点的模长 $|z|$ 是否 < 1

例子:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

分母为零: $1 - 0.5z^{-1} = 0$, 即 $z = 0.5$

$|0.5| < 1 \rightarrow$ 极点在单位圆内 \rightarrow 稳定!

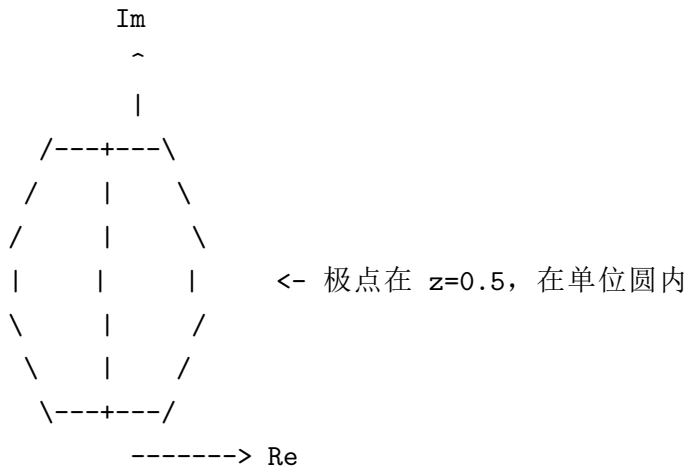
$$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$$

分母为零: $1 - 2z^{-1} = 0$, 即 $z = 2$

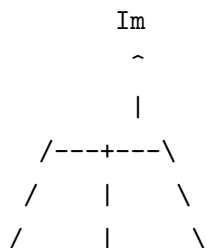
$|2| > 1 \rightarrow$ 极点在单位圆外 \rightarrow 不稳定!

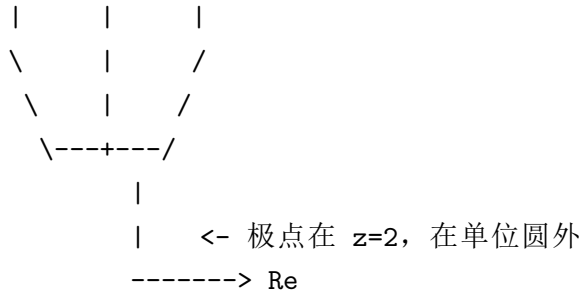
z平面图示:

稳定系统 ($H(z) = 1/(1-0.5z^{-1})$):



不稳定系统 ($H(z) = 1/(1-2z^{-1})$):





离散频率响应：沿单位圆走一圈

在连续世界，频率响应是 $H(j\omega)$ — 即拉普拉斯变换沿虚轴取值。

在离散世界，频率响应是 $H(e^{j\Omega})$ — 即 Z 变换沿单位圆取值。

$$H(e^{j\Omega}) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

当 Ω 从 0 走到 2π ，我们沿着单位圆走了一圈，得到了系统对所有频率的响应。

沿单位圆走一圈 = 扫过所有频率

- $\Omega = 0$ $\rightarrow z = 1$ \rightarrow 直流响应
- $\Omega = \pi/2$ $\rightarrow z = j$ \rightarrow 中频响应
- $\Omega = \pi$ $\rightarrow z = -1$ \rightarrow 最高频响应（奈奎斯特频率）
- $\Omega = 2\pi$ \rightarrow 回到 $z = 1$ \rightarrow 和 $\Omega = 0$ 相同（周期性！）

离散频率 Ω 和连续频率 ω 的关系：

$$\Omega = \omega T_s$$

- Ω 的单位是弧度/采样点
- Ω 的范围：0 到 π （对应 0 到 $f_s/2$ ）

一句话记忆

离散系统的稳定看极点是否在单位圆内；频率响应就是沿单位圆走一圈。

0.5.8 7. 连续 vs 离散对照表（核心!）

这是 Part 4 最重要的部分。把两个世界的概念——对应起来。

基本概念对应

概念	连续世界	离散世界
信号	$x(t)$ (圆括号)	$x[n]$ (方括号)
自变量	t 时间 (连续)	n 序号 (整数)
基本运算	微分 $\frac{d}{dt}$	差分 ∇
系统描述	微分方程	差分方程
延迟	无直接对应	$x[n-1]$ (核心运算!)

变换对应

概念	连续世界	离散世界
变换类型	拉普拉斯变换	Z 变换
公式	$X(s) = \int x(t)e^{-st}dt$	$X(z) = \sum x[n]z^{-n}$
核心性质	微分 \rightarrow 乘 s	延迟 \rightarrow 乘 z^{-1}
复变量	$s = \sigma + j\omega$	$z = re^{j\Omega}$
两者关系	—	$z = e^{sT_s}$

稳定性对应

概念	连续世界	离散世界
稳定边界	虚轴 $j\omega$	单位圆 $ z = 1$
稳定区域	左半平面 ($\sigma < 0$)	单位圆内 ($ z < 1$)
不稳定区域	右半平面 ($\sigma > 0$)	单位圆外 ($ z > 1$)

频率响应对应

概念	连续世界	离散世界
频率响应	$H(j\omega)$	$H(e^{j\Omega})$
取值路径	沿虚轴 $s = j\omega$	沿单位圆 $z = e^{j\Omega}$
频率范围	0 到 ∞	0 到 π (对应 $f_s/2$)

0.5.9 8. 离散世界的”信号处理三件套”

重温 Part 1 的”信号与系统三件套”，现在看看离散世界的版本：

信号分解（离散版）

在连续世界，我们把信号分解成不同频率的正弦波。

在离散世界，同样的思想，但用的是离散频率：

$$x[n] = \sum_k A_k \cos(\Omega_k n + \phi_k)$$

计算机可以做离散傅里叶变换（DFT）来分解信号。

连续傅里叶：分解成 $e^{j\omega t}$ （无穷多个频率）

离散傅里叶：分解成 $e^{j\Omega n}$ （有限个频率）

计算机真正执行的是 FFT（快速傅里叶变换）

FFT = 一种超级快速的离散傅里叶算法

系统描述（离散版）

方式	描述
差分方程	$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots$
系统函数	$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$
冲激响应	$h[n]$ （输入为单位冲激时的输出）
频率响应	$H(e^{j\Omega})$

卷积（离散版）

连续卷积：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

离散卷积：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

离散卷积 = 加法和乘法，计算机算起来飞快！

0.5.10 9. 完整知识地图

Part 4 知识地图：离散世界

=====

现实问题：计算机只能处理数字，怎么处理信号？

v

采样（模数转换）

连续信号 $x(t)$ ---> 离散序列 $x[n]$

关键：采样频率 f_s 必须 $2 \times$ 最高频率

否则 -> 混叠 (Aliasing)

预防 -> 抗混叠滤波器

v

离散系统的描述

微分方程 ---> 差分方程

导数 ---> 差分（减法！）

v

离散系统的分析工具

拉普拉斯变换 ---> Z变换

微分 -> 乘 s 延迟 -> 乘 z^{-1}

v

稳定性分析

虚轴 ---> 单位圆

左半平面 ---> 单位圆内（稳定）

右半平面 ---> 单位圆外（不稳定）

v

频率响应

沿虚轴取值 ---> 沿单位圆取值

$H(j)$ ---> $H(e^{j\Omega})$

核心思想：离散世界是连续世界的"数字影子"

一切连续操作都有对应的离散操作

0.5.11 Part 5 预告

现在我们有了四套工具：

工具	用于	处理对象
傅里叶变换	频率分析	连续信号
拉普拉斯变换	稳定性、系统分析	连续系统
Z 变换	稳定性、系统分析	离散系统
(离散傅里叶变换)	频率分析	离散信号

你可能会问：

这四个东西到底有什么关系？

- 为什么傅里叶变换是拉普拉斯变换的特例？
- 为什么 Z 变换对应拉普拉斯变换？
- 为什么离散频率响应沿单位圆取值，连续频率响应沿虚轴取值？
- 它们能不能统一起来？

Part 5: 统一视角将回答这个问题。

我们会画出一张大图，把这四个变换放在一起对比，让你看到：

它们都是同一个思想的不同表现形式。

等等看。

0.5.12 附录：常见问题

Q1: 为什么离散信号的频率上限是 π ？

因为 $\Omega = \omega T_s$ ，而 $f_s = 1/T_s$ 。

根据奈奎斯特定理，最高频率是 $f_s/2$ ，对应的角频率是 $\omega_{\max} = 2\pi(f_s/2) = \pi f_s$ 。

所以 $\Omega_{\max} = \omega_{\max} T_s = \pi f_s \cdot T_s = \pi$ 。

离散频率的范围是 $[0, \pi]$ ，对应连续频率 $[0, f_s/2]$ 。

Q2: Z 变换的收敛域是什么？

Z 变换是个无穷级数，不是对所有 z 都收敛的。

收敛域（ROC, Region of Convergence）是使级数收敛的 z 的取值范围。

例子: $x[n] = (0.5)^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n z^{-n} = \sum (0.5z^{-1})^n$$

这个级数收敛当且仅当 $|0.5z^{-1}| < 1$

即 $|z| > 0.5$

所以 ROC: $|z| > 0.5$ （单位圆外半径为0.5的区域）

关键：稳定的系统，其收敛域必须包含单位圆。

Q3: 离散卷积和连续卷积有什么区别和联系？

相同点：都是“翻转、平移、相乘、求和/积分”的思想。

不同点：- 连续：积分 (\int) - 离散：求和 (\sum)

离散卷积是连续卷积的数值近似。

Q4: 为什么数字信号处理这么重要?

因为便宜、灵活、可编程。

模拟电路:	数字信号处理:
+-----+	+-----+
电阻电容	写代码改算法
焊死了	改几个参数
不能改	功能就变了
+-----+	+-----+
v	v
硬件固定	软件定义
成本高	成本低

这就是为什么几乎所有现代电子产品都用数字信号处理。

Q5: 从连续到离散, 丢失的信息能恢复吗?

如果采样满足奈奎斯特定理: 能!

只要采样频率 $\geq 2f_{\max}$, 理论上可以从离散样本中完美恢复原始连续信号。

恢复方法: 低通滤波 (也叫"插值"或"重构")。

离散点:

v 通过低通滤波器 (平滑)

恢复: \ / \ / \ / \ /
 / \ / \ / \ / \

这叫做香农采样定理的完整表述: > 如果 $f_s > 2f_{\max}$, 则信号可以被样本完美重建。

Part 4 完 | 下一部分: Part 5 — 统一视角: 四大变换的内在联系

0.6 Part 5: 统一视角——四大变换的内在联系

核心问题: 傅里叶、拉普拉斯、Z 变换之间究竟是什么关系? 学完这门课, 你到底学到了什么?

0.6.1 5.1 先回头看: 我们走过了怎样的路?

在开始这一章之前, 请回想一下你这门课的学习旅程:

- Part 1: 你学会了用数学描述"信号"和"系统"
- Part 2: 你发现任何信号都可以拆成不同频率的正弦波——这是傅里叶的思想

- Part 3: 你发现有些系统不稳定, 傅里叶搞不定——于是有了拉普拉斯

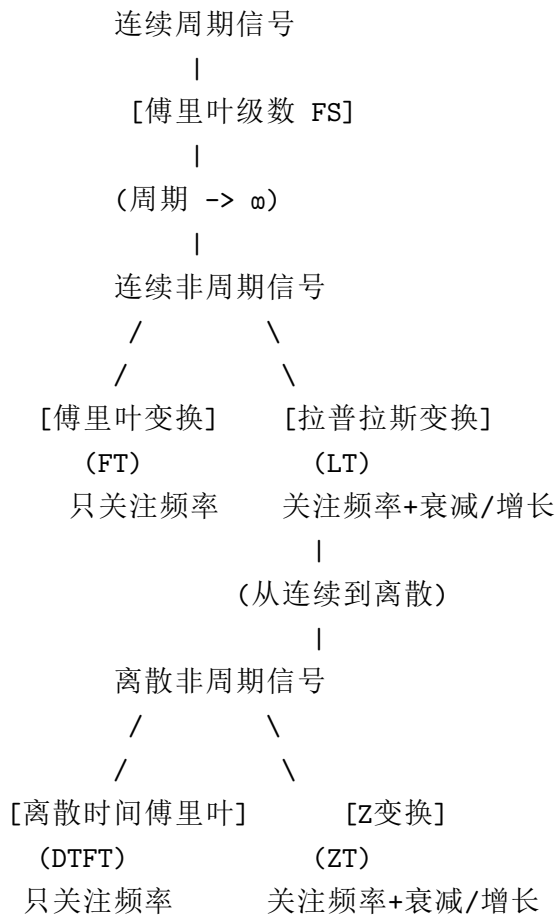
- Part 4: 你发现计算机只能处理离散数据——于是有了 Z 变换

四个工具, 四个故事。但它们之间不是孤立的。

这一章的任务: 把这些散落的珠子串成一条项链。

0.6.2 5.2 四大变换: 一张谱系图

如果你把四个变换想象成一个家族的”族谱”, 就会非常清楚它们是怎么”出生”的:



5.2.1 这个图在说什么?

这个谱系图揭示了两个”维度”的推广:

维度一: 从周期到非周期

- 周期信号 -> 用傅里叶级数 (FS/DFS), 拆成离散的频率成分
- 非周期信号 -> 用傅里叶变换 (FT/DTFT), 频率是连续的

维度二: 从纯频率到复频率

- 傅里叶家族: 只关心 $j\omega$ (纯正弦波)
- 拉普拉斯/Z 变换家族: 关心 $s = \sigma + j\omega$ (衰减/增长 + 正弦波)

5.2.2 一张表看懂四个主角

变换	适用信号	变换变量	物理含义
傅里叶级数 (FS)	连续周期	$n\omega_0$	离散频率分量
傅里叶变换 (FT)	连续非周期	ω	连续频率分布
拉普拉斯变换 (LT)	连续 (任意)	$s = \sigma + j\omega$	复频率 (含衰减/增长)
离散时间傅里叶 (DTFT)	离散非周期	Ω	离散频率分布
Z 变换 (ZT)	离散 (任意)	$z = re^{j\Omega}$	复频率的离散版

0.6.3 5.3 核心思想回顾：所有变换都是”换个角度看问题”

5.3.1 一个最重要的认知

变换不是改变事物本身，而是改变你看它的方式。

想象你有一块水晶：

- 在阳光下看，它是透明的（时域视角）
- 在紫外线下看，它发出荧光（频域视角）
- 用 X 光看，能看到内部结构（复频域视角）

水晶没有变，是你的”观察工具”变了。

5.3.2 四个”观察视角”

视角	数学工具	看到什么	像什么
时域	原始信号 $x(t)$	信号随时间怎么变	看一个人的日常行为
频域	$X(j\omega)$	信号有哪些频率成分	看这个人的性格特质
复频域 (s 域)	$X(s)$	信号的衰减/增长 + 频率	看这个人的潜力和极限

视角	数学工具	看到什么	像什么
z 域	$X(z)$	离散信号的衰减/增长 + 频率	看一个人的”数据画像”

5.3.3 直观类比：做菜

想象你在品尝一道汤：

- 时域：一勺一勺喝，感受味道随时间变化（“嗯，第一口偏咸，后面变淡了”）
- 频域：分析汤里有哪几种味道成分（“有咸味、鲜味、微辣”）
- 复频域：分析这些味道在时间中的演化趋势（“咸味会持续，辣味会衰减”）
- Z 变换：每 10 秒采样一勺，用离散数据做出同样的分析

汤还是那碗汤——你只是换了不同的分析方式。

0.6.4 5.4 s 域、j 域、z 域的关系

这是整门课最关键的公式关系之一。如果你能理解下面这张图，你就理解了这些变换之间的血脉联系。

5.4.1 从拉普拉斯到傅里叶： $s = j$

回忆拉普拉斯变换的定义：

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

其中 $s = \sigma + j\omega$ 。

如果让 $\sigma = 0$ ，即 s 只在虚轴上取值：

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

这不就是傅里叶变换吗?!

核心结论：

傅里叶变换 = 拉普拉斯变换在 $s = j\omega$ （虚轴）上的取值

拉普拉斯是”三维”的（ σ 和 ω 两个维度），傅里叶是”二维”的（只有 ω 一个维度）。你可以这样想象：

- 拉普拉斯变换是一个平面（ σ 和 ω 构成的复平面）
- 傅里叶变换是这个平面的一条线（虚轴）

5.4.2 从连续到离散: $z = e^{sT_s}$

这是连接连续世界和离散世界的桥梁。

Z 变换的定义是:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

而 z 和 s 的关系是:

$$z = e^{sT_s}$$

其中 T_s 是采样间隔。

这看起来只是一个公式, 但它有极其深刻的含义:

从 s 平面到 z 平面的映射关系:

s 平面	->	z 平面
左半平面 ($\sigma < 0$)	->	单位圆内部 ($ z < 1$)
虚轴 ($\sigma = 0$)	->	单位圆边界 ($ z = 1$)
右半平面 ($\sigma > 0$)	->	单位圆外部 ($ z > 1$)

5.4.3 为什么这个映射如此重要?

因为稳定性的判断标准在两个世界中完美对应:

系统类型	s 域条件	z 域条件
稳定	极点都在左半平面	极点都在单位圆内
临界稳定	极点在虚轴上	极点在单位圆上
不稳定	极点在右半平面	极点在单位圆外

这是整门课最优雅的地方之一——连续和离散世界的稳定性理论, 在数学上完美对称。

5.4.4 从 Z 变换到离散频率: $z = e^{j\Omega}$

和连续世界类似, 如果让 z 只在单位圆上取值:

$$z = e^{j\Omega}$$

代入 Z 变换:

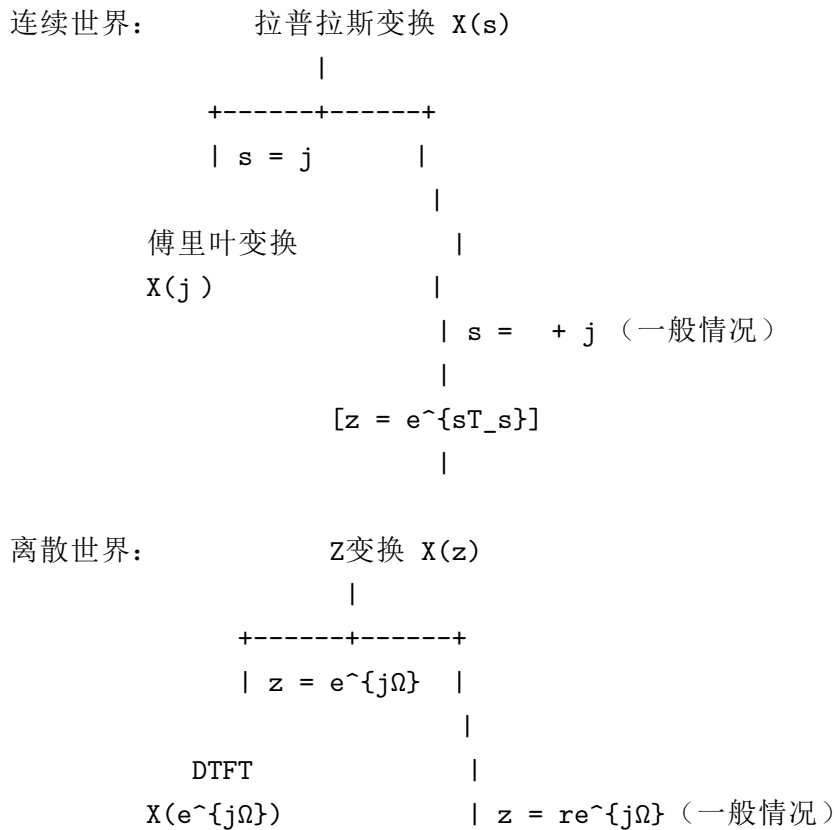
$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

这就是离散时间傅里叶变换 (DTFT)!

核心结论:

DTFT = Z 变换在单位圆上的取值

5.4.5 三者的关系总图



5.4.6 一个更直观的理解

想象你在拍一部纪录片：

- 拉普拉斯变换 = 一部完整的电影（包含所有细节，可以快进/快退，分析趋势）
- 傅里叶变换 = 这部电影的截图（只取虚轴这一帧）
- Z 变换 = 电影被数字化后的 MP4 文件（离散版本）
- DTFT = 这个 MP4 文件的截图（离散版本的虚轴）

0.6.5 5.5 统一的思想：特征函数

现在到了整门课最深刻的部分。

5.5.1 什么是“特征函数”？

你可能在线性代数中学过“特征向量”的概念：

一个矩阵 A 作用于向量 v ，结果等于 v 的缩放： $Av = \lambda v$

“特征函数”是同样的道理：

一个 LTI 系统 H 作用于函数 $f(t)$ ，结果等于 $f(t)$ 的缩放

5.5.2 LTI 系统的特征函数是什么？

答案是：指数函数。

- 连续世界： e^{st} 是 LTI 系统的特征函数
- 离散世界： z^n 是 LTI 系统的特征函数

证明非常简单（理解思想即可，不需要记住公式）：

如果一个 LTI 系统的冲激响应是 $h(t)$ ，输入 $x(t) = e^{st}$ ，那么输出是：

$$y(t) = h(t) * e^{st} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right]}_{H(s)} \cdot e^{st}$$

看到没有？输出 = 一个常数 $H(s)$ 乘以输入 e^{st} 。

e^{st} 经过 LTI 系统，还是 e^{st} ——只是幅度变了。

5.5.3 为什么这对理解变换至关重要？

因为傅里叶变换、拉普拉斯变换、Z 变换的本质都是：

把任意信号拆成 LTI 系统”特征函数”的线性组合

具体来说：

变换	拆成什么的线性组合？	为什么选它？
傅里叶	$e^{j\omega t}$ （纯正弦波）	它是 LTI 系统的特征函数
拉普拉斯	e^{st} （复指数）	它是 LTI 系统的特征函数（最一般形式）
Z 变换	z^n （离散复指数）	它是离散 LTI 系统的特征函数

5.5.4 这就解释了为什么所有变换都是”对信号做内积”

你有没有注意到，这些变换的公式都有相同的形式？

连续世界：

$$X(\text{参数}) = \int x(t) \cdot [\text{特征函数}]^* dt$$

离散世界：

$$X(\text{参数}) = \sum x[n] \cdot [\text{特征函数}]^*$$

它们都是在问同一个问题：

“信号中有多少这个特征函数的成分？”

5.5.5 一句话总结

傅里叶/拉普拉斯/Z 变换的本质 = 把信号拆成 LTI 系统”特征函数”的线性组合

这就是为什么这门课把这三个变换放在一起讲——它们在数学上是同一件事情。

0.6.6 5.6 学完这门课，你获得了什么能力？

现在让我们从更高的角度看看，你通过这门课获得了哪些实实在在的能力。

5.6.1 能力一：分析能力

给定一个系统，能预测它对任意输入的响应

- 时域法：卷积 $y(t) = x(t) * h(t)$
- 变换域法： $Y(s) = H(s)X(s) \rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$
- 频率法：通过频率响应预测系统对不同频率信号的放大/衰减

现实意义：给你一个电路/滤波器，你能算出输入任何信号时输出是什么。

5.6.2 能力二：设计能力

给定需求，能设计出满足要求的系统

- 滤波器设计：想要低通？高通？带通？设计对应的 $H(s)$ 或 $H(z)$
- 控制器设计：让不稳定的系统变稳定（控制理论的基础）
- 均衡器设计：补偿信号的频率失真

现实意义：客户说”我要一个能滤掉 50Hz 噪声的系统”，你能设计出来。

5.6.3 能力三：诊断能力

能判断系统是否稳定，哪里有问题

- 极点分析：看系统函数的极点位置判断稳定性
- 频率响应：看幅频/相频曲线判断信号失真情况
- 因果性检查：判断系统是否物理可实现

现实意义：给你的音响系统做”体检”，发现它在某个频率会自激振荡。

5.6.4 能力四：转换能力

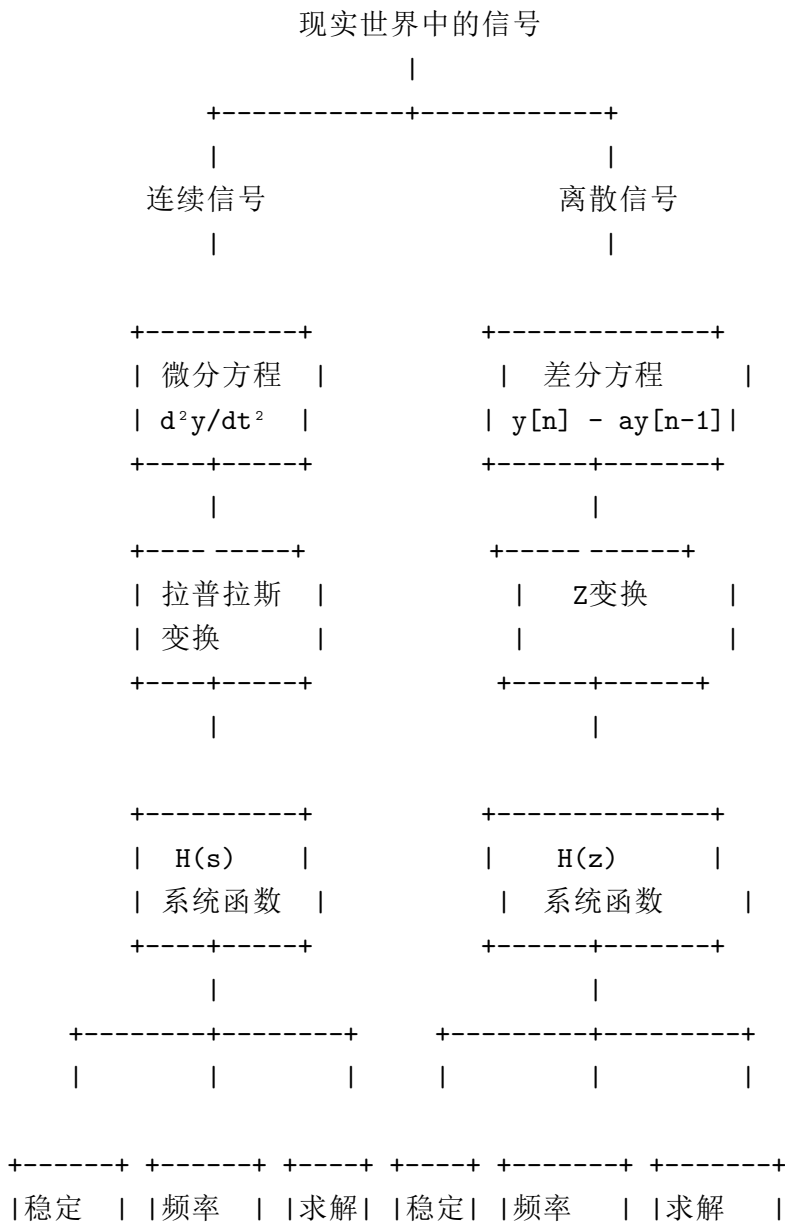
能在时域/频域/复频域之间自由切换

- 时域看不懂？换到频域
- 频域不够用？换到复频域
- 连续搞不定？采样换到离散

现实意义：遇到问题时不是硬刚，而是灵活选择最合适的分析工具。

0.6.7 5.7 一张”终极”思想地图

现在，让我们把整门课画成一张地图：



```

|性分析| |响应| |微| |性分| |响应| |差分| |
| | | |分方| |析| | | |方程| |
|极点| |s=j| |程| |极点| |z=e^{j\Omega}| |
|位置| |->幅频| |变代| |在单| |->幅频| |代数化|
+-----+ +-----+ |数| |位圆| +-----+ +-----+
                    +-----+ |内外|
                        +-----+
    
```

```

+-----+
|           背后统一的数学思想           |
|                                           |
| "分解 + 变换 + 组合"                   |
|                                           |
| 把复杂信号 -> 拆成简单成分             |
| -> 分别处理 -> 组合成结果             |
|                                           |
| 本质: 用LTI系统的"特征函数"           |
| (e^{st} / z^n) 作为"原子"来分解信号   |
+-----+
    
```

0.6.8 5.8 学完这门课，你获得了什么”思维工具”？

让我们把这些工具放进一个”工具箱”里：

工具	适用场景	什么时候用
卷积	时域分析	信号简单、系统简单时
傅里叶变换	频率分析	想知道信号的频率成分、系统的频率响应
拉普拉斯变换	连续系统全面分析	分析稳定性、求解微分方程、有初始条件
Z 变换	离散系统全面分析	数字滤波器设计、离散系统稳定性
DTFT	离散系统频率分析	数字滤波器的频率响应

选择指南

如果你的问题是... 请用...

- "这个信号里有哪些频率？" -> 傅里叶变换
- "这个系统会不会自激振荡？" -> 拉普拉斯/Z变换（极点分析）
- "这个电路对10kHz信号的响应如何？" -> 傅里叶变换（频率响应）

- "这个系统有初始储能，求输出？" -> 拉普拉斯变换（含初始条件）
"这个数字滤波器效果怎样？" -> Z变换（系统函数）+ DTFT（频率响应）
"这个系统到底稳不稳？" -> 拉普拉斯/Z变换（极点位置）
"我只是想知道输出波形..." -> 卷积（最简单直接）
-

0.6.9 5.9 信号与系统的”世界观”

如果你只能从这门课带走一样东西，我希望是下面这个思维方式：

5.9.1 核心世界观：域转换

当一个问题在一个域中很难时，换到另一个域可能变得非常简单。

这个思想贯穿了整门课的每一个角落：

在哪个域很难	换到哪个域	为什么变简单了
时域：卷积很复杂	频域/复频域	卷积变成乘法
时域：微分/差分方程难解	复频域	微分/差分变成代数运算
时域：稳定性看不出来	复频域	看极点位置一目了然

5.9.2 这个世界观不止适用于这门课

“域转换”的思想是一个通用的问题解决方法，你可以用在任何地方：

- 数学：笛卡尔坐标系下难解的方程，极坐标系下可能一目了然
- 编程：面向对象难设计的问题，函数式编程可能很优雅
- 生活：正面沟通行不通，换个角度（域）也许就能解决

5.9.3 “分解”是最强大的思维武器

除了”域转换”，这门课还教会了你“分解”：

- 傅里叶分解：把复杂波形分解成简单正弦波
- 部分分式展开：把复杂分式分解成简单分式
- 线性系统分解：把复杂系统分解成基本模块的级联/并联

所有复杂问题，拆成简单问题的组合，就不再复杂了。

0.6.10 5.10 写给零基础同学的”一句话毕业总结”

如果你只能记住三句话：

1. 傅里叶变换让你看到信号的”成分”——就像营养标签让你看到食物的成分
2. 拉普拉斯变换让你看透系统的”性格”——包括它会不会崩溃（稳定性）
3. Z 变换让你在计算机的世界里做同样的事——把连续世界的智慧搬到离散世界

如果你只能记住一句话：

信号与系统教会你的不是数学公式，而是一种思维方式：当一个问题太难时，换一个角度（域）看它。

具体来说：

傅里叶：从时间维度 -> 频率维度

拉普拉斯：从实轴 -> 复平面（增加了”趋势”维度）

Z变换：从连续 -> 离散（让计算机也能处理信号）

这就像戴着不同颜色的墨镜看世界。

世界没变，但你看到的东西不一样了。

而当你学会了在所有视角之间自由切换，你就拥有了比公式更重要的东西——一种分析问题的思维方式。

0.6.11 附录：快速对照表

四大变换公式一览

变换	公式	适用
傅里叶级数	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	连续周期信号
傅里叶变换	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	连续非周期信号
拉普拉斯变换	$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$	连续信号（任意）
DTFT	$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$	离散非周期信号
Z 变换	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$	离散信号（任意）

核心关系一览

拉普拉斯 $X(s)$ --- $s = j$ ---> 傅里叶 $X(j)$

拉普拉斯 $X(s)$ --- $z = e^{sT_s}$ ---> Z变换 $X(z)$

Z变换 $X(z)$ --- $z = e^{j\Omega}$ ---> DTFT $X(e^{j\Omega})$

稳定性判据一览

系统类型	连续 (拉普拉斯)	离散 (Z 变换)
稳定	所有极点在左半平面	所有极点在单位圆内
临界稳定	极点在虚轴上 (单极点)	极点在单位圆上 (单极点)
不稳定	有极点在右半平面	有极点在单位圆外

恭喜你走完了这段旅程!

信号与系统是很多高阶课程的基础: - 数字信号处理 (DSP) - 自动控制原理 - 通信原理 - 数字图像/音频处理

这些小册子里的”第一性原理”思维, 会在未来的学习中反复出现。

记住: 不要被公式吓倒, 永远回到”为什么需要这个”去思考。

Part 5 完 / 信号与系统第一性原理小册子完