信号与系统

信号与系统 - 学习笔记

作者：learn$_{W}ORLDX$

日期：2026 年 06 月 29 日

基于 learn_WORLDX 资料汇编

由 Pandoc + XeLaTeX 自动生成

Contents

0.1 信号与系统学习笔记 - 总目录

0.1.1 课程整体框架

本课程是电子信息、通信工程、自动化等专业的核心基础课。信号与系统是连接**数学**与**工程实践**的桥梁，它为后续的通信原理、数字信号处理、自动控制原理、图像处理等课程奠定理论基础。

信号与系统研究什么?

外部世界 → 信号（输入） → 系统 → 信号（输出） → 外部世界

- **信号**：信息的载体，如语音信号、图像信号、电磁波信号
- **系统**：对信号进行加工处理的装置或算法，如滤波器、放大器、通信信道

本课程的核心思想

1. **分解与叠加**：复杂信号可以分解为简单基本信号的组合
2. **变换域分析**：通过傅里叶变换、拉普拉斯变换等" 换一个角度看问题"
3. **LTI 系统分析**：线性时不变系统是最基本、最易分析的系统类型

两条主线

主线	时域分析	变换域分析
连续系统	卷积积分、微分方程	傅里叶变换、拉普拉斯变换
离散系统	卷积和、差分方程	傅里叶变换、Z 变换

0.1.2 各章内容简介

第 1 章：信号与系统基础

前置知识：高等数学（微积分、复数）**核心内容**：- 信号的分类体系 - 基本信号运算（平移、反转、尺度变换）- 典型信号（阶跃、冲激、斜坡、复指数）- 系统的分类 - LTI 系统的特性

学习目标：掌握信号的各种分类方式，熟悉基本信号的数学表达和性质，理解系统分类的含义。

第 2 章：连续时间系统时域分析

前置知识：第 1 章、常微分方程 **核心内容**：- 微分方程描述系统 - 零输入响应和零状态响应 - 冲激响应 - 卷积积分（重点 + 难点）- 系统的因果性和稳定性

学习目标：掌握卷积的图形解释和计算，理解系统响应的分解。

第 3 章：傅里叶变换

前置知识：第 1-2 章、傅里叶级数 **核心内容**：- 傅里叶级数（三角/指数形式）- 傅里叶变换定义与性质 - 常见信号的傅里叶变换对 - 频率响应 - 采样定理 - 吉布斯现象

学习目标：理解”将信号分解为不同频率的正弦波”这一核心思想，掌握傅里叶变换的基本性质。

第 4 章：拉普拉斯变换（最重要）

前置知识：第 1-3 章、复变函数基础 **核心内容**：- 拉普拉斯变换定义 - 收敛域 (ROC) 分析 - 性质与常用变换对 - 反变换（部分分式展开）- 求解微分方程 - 系统函数与零极点分析 - 系统方框图实现

学习目标：拉普拉斯变换是分析连续系统的最强大工具，必须熟练掌握其定义、性质和求解方法。

第 5 章：离散时间信号与系统

前置知识：第 1-2 章 **核心内容**：- 离散信号表示 - 基本序列 - 采样过程 - 差分方程 - 离散卷积和 - 离散系统的因果性和稳定性

学习目标：理解从连续到离散的转换，掌握离散信号的基本运算。

第 6 章：Z 变换

前置知识：第 4-5 章 **核心内容**：- Z 变换定义 - 收敛域 (ROC) - 性质与常用变换对 - Z 反变换 - 求解差分方程 - 离散系统函数

学习目标：Z 变换是离散域中的”拉普拉斯变换”，是分析离散系统的主要工具。

第 7 章：系统函数与状态变量

前置知识：第 4、6 章 **核心内容**：- 系统函数分析 - 零极点与频率响应 - 稳定性分析 - 状态变量描述 - 状态方程与输出方程 - 可控性与可观性

学习目标：从更高的视角理解系统的整体特性，掌握现代控制理论的基础概念。

第 8 章：离散时间系统 Z 域分析

前置知识：第 4、6 章 **核心内容**：- Z 变换与拉普拉斯变换的关系 - 离散系统函数 - 频率响应 - 稳定性判据

学习目标：理解连续与离散系统的内在联系，掌握 Z 域分析方法。

0.1.3 学习路线建议

路线一：按章节顺序（推荐）

```
第1章 → 第2章 → 第3章 → 第4章 → 第5章 → 第6章 → 第7章 → 第8章
```

这是最传统的学习顺序，由浅入深，适合初学者。

路线二：按系统类型划分

连续系统主线：

```
第1章(信号概念) → 第2章(连续时域) → 第3章(傅里叶变换) → 第4章(拉普拉斯变换)
```

离散系统主线：

```
第1章(信号概念) → 第5章(离散基础) → 第6章(Z变换) → 第8章(Z域分析)
```

综合与提升：

```
第7章(系统函数与状态变量) — 对连续和离散系统都适用
```

路线三：重点章节学习

如果时间有限，按重要性排序：1. **第 4 章（拉普拉斯变换）** — 最重要，考试分值最高 2. **第 3 章（傅里叶变换）** — 概念最深刻 3. **第 6 章（Z 变换）** — 离散系统的核心 4. **第 2 章（时域分析）** — 基础中的基础

0.1.4 核心概念关系图

时域分析

傅里叶变换 → 频域分析（正弦波分解）

推广到复频域 → 拉普拉斯变换（连续）

离散化 → Z变换（离散）

离散化 → 差分方程 → 离散卷积 → Z变换

0.1.5 补充知识链接

预备数学知识

概念	说明
复数	$a + jb$，极坐标表示 $re^{j\theta}$
欧拉公式	$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$
微积分	求导、积分、分部积分
常微分方程	齐次解 + 特解
级数求和	几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

常用 LaTeX 公式备忘

含义	公式
傅里叶变换	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$
拉普拉斯变换	$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$
Z 变换	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$
卷积积分	$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
卷积和	$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

0.1.6 常用信号与系统公式速查表

连续时间傅里叶变换对

信号 $x(t)$	傅里叶变换 $X(j\omega)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

拉普拉斯变换对

信号 $x(t)$	拉普拉斯变换 $X(s)$	ROC
$\delta(t)$	1	全部 s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} > -a$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\Re\{s\} > 0$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$

Z 变换对

序列 $x[n]$	Z 变换 $X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	全部 z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|zvert > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|zvert > \|avert$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|zvert > \|avert$
$\sin(\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{\sin(\Omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|zvert > 1$
$\cos(\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-\cos(\Omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|zvert > 1$

提示：每个章节的笔记都包含定义、数学推导、直观理解、典型例题和常见困惑解答。建议先阅读本章笔记，然后做课后习题巩固。如果遇到推导跳步的地方，可以查阅前置知识章节。

0.2 补充知识：信号与系统前置基础

写给零基础 EE 同学的自学指南 —— 你需要知道什么才能学好这门课

0.2.1 目录

0.2.2 一、数学前置知识

1. 复数与欧拉公式 —— 最重要，没有之一

为什么需要：信号与系统的" 语言" 就是复指数信号 e^{st}（其中 $s = \sigma + j\omega$）。从第一章的复指数信号到第四章的拉普拉斯变换，整个课程都在用复数。

核心概念：

- **复数表示**：$z = a + jb$，其中 $j = \sqrt{-1}$（EE 中用 j 而非 i，因为 i 已被电流占用）
- **复平面**：实部为横轴，虚部为纵轴
- **极坐标形式**：$z = re^{j\theta} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$
  - $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ 是模长
  - $\theta = \tan^{-1}(b/a)$ 是辐角
- **欧拉公式**（整个课程的基石）：

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

- **由欧拉公式推出的重要关系**：

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

- **共轭复数**：$z^* = a - jb$，模不变，辐角取反

- **复数运算**：加减 = 实部虚部分别加减；乘除 = 极坐标下模相乘除、辐角相加减

在课件中的体现： - 第一章：复指数信号 $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ - 第三章：傅里叶级数的指数形式 - 第四章：拉普拉斯变换 $s = \sigma + j\omega$ - 第六章：z 变换 $z = re^{j\Omega}$

---

2. 微积分基础

为什么需要：信号处理本质上是对函数做积分（变换）和微分（系统描述）。

必须掌握：

- **导数**：基本求导公式
  - $\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$
  - $\frac{d}{dt}\sin(\omega t) = \omega\cos(\omega t)$
  - $\frac{d}{dt}\cos(\omega t) = -\omega\sin(\omega t)$
- **积分**：基本积分公式
  - $\int e^{at}dt = \frac{1}{a}e^{at} + C$
  - $\int \sin(\omega t)dt = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t) + C$
  - **分部积分**：$\int u dv = uv - \int v du$
- **极限**：
  - $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$（出现在采样定理、傅里叶变换中）
  - $\lim_{t\to\infty} e^{-at} = 0$（当 $a > 0$，系统稳定性判据）
- **瑕积分（反常积分）**：傅里叶变换和拉普拉斯变换都涉及从 $-\infty$ 到 ∞ 的积分

在课件中的体现： - 第二章：用微分方程描述系统 - 第三章：傅里叶变换的积分定义 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ - 第四章：拉普拉斯变换的积分定义

---

3. 常微分方程（ODE）

为什么需要： LTI 系统在时域中用线性常系数微分方程描述。

必须掌握：

- **一阶 ODE**：$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$
  - 齐次解：$y_h(t) = Ce^{-at}$
  - 特解取决于输入形式
  - **直观理解**：一阶 RC 电路的充放电过程
- **二阶 ODE**：$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t)$
  - 特征方程：$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$
  - 齐次解取决于特征根（实根/复根/重根）
- **求解步骤**：
  1. 求解齐次方程（特征方程法）
  2. 求特解（根据输入形式设待定系数）

3. 利用初始条件确定待定系数

- **最关键的理解**：系统响应 = 零输入响应（初始状态引起）+ 零状态响应（输入引起）

在课件中的体现： - 第二章：连续系统微分方程求解（核心内容）- 第四章：用拉普拉斯变换求解微分方程（更简便的方法）

---

4. 三角学

为什么需要：正弦/余弦信号是基本信号，傅里叶级数本质上是三角函数的叠加。

必须掌握：

- **基本恒等式**：
  - $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
  - $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
  - $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
- **和差化积**（傅里叶级数推导中用）：
  - $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
  - $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
- **正交性**（傅里叶级数的核心!!!）：

$$\int_0^T \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/2, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

  - 不同频率的正弦/余弦在周期内积分为零 → 可以分离出各频率分量

在课件中的体现： - 第三章：傅里叶级数（三角形式）- 信号的正交分解

---

5. 级数与序列

为什么需要：离散时间信号是序列，z 变换涉及无穷级数求和。

必须掌握：

- **几何级数**（最最常用! z 变换的命脉）：
  - 有限项：$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1-r^N}{1-r}$
  - 无穷项（$|r| < 1$）：$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$
  - 无穷项（$|r| > 1$）：$\sum_{n=-\infty}^{-1} r^n = \frac{r^{-1}}{1-r^{-1}}$
- **幂级数**：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$（z 变换就是幂级数!）
- **收敛性**：级数在什么条件下收敛 → 对应 z 变换的收敛域 (ROC)

在课件中的体现： - 第六章：z 变换的定义就是幂级数 - 第六章：ROC 的判断依赖几何级数的收敛条件

---

6. 线性代数初步

为什么需要：第七章状态变量分析要用到矩阵。

必须掌握：

- **向量和矩阵**的基本运算：加减、乘法
- **矩阵特征值**：$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$
  - 特征值 λ 决定系统的自然频率和稳定性
- **矩阵指数**：e^{At}（状态转移矩阵）
- **行列式**：用于求特征值

在课件中的体现： - 第七章：状态方程和输出方程的矩阵形式 - 第七章：状态转移矩阵 e^{At}

0.2.3 二、EE 电路基础

1. RLC 三大元件的特性

为什么需要：信号与系统的很多例子来自电路，理解元件特性才能理解系统行为。

元件	时域关系	符号
电阻 R	$v = iR$	欧姆定律
电容 C	$i = C\frac{dv}{dt}$	电压变化产生电流
电感 L	$v = L\frac{di}{dt}$	电流变化产生电压

直观理解： - **电容**像水桶 —— 积累电荷需要时间，所以电压不能突变 - **电感**像飞轮 —— 电流有惯性，不能突变

2. 一阶 RC/RL 电路的瞬态响应

为什么需要：一阶系统的响应是理解”系统时间常数”和”指数衰减”的最佳直观例子。

- **RC 电路充电**：$v_c(t) = V_s(1 - e^{-t/\tau})$，其中 $\tau = RC$ 是时间常数
- **RC 电路放电**：$v_c(t) = V_0 e^{-t/\tau}$
- **时间常数** τ 决定了系统响应的快慢

理解重点： τ 越大，响应越慢。在信号与系统中，时间常数对应极点的位置。

3. 频域阻抗

为什么需要：从时域到频域的桥梁。

- 电阻：$Z_R = R$
- 电容：$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$（时域微分 $\to$ 频域除以 $j\omega$）
- 电感：$Z_L = j\omega L$（时域微分 $\to$ 频域乘以 $j\omega$）

直观理解：在频域中，电容和电感变成了" 频率相关的电阻"。高频时电容阻抗小 (短路)，电感阻抗大（开路）。

在课件中的体现： - 第四章：用拉普拉斯变换分析电路（s 域模型）- 第七章：系统函数 $H(s)$ 与电路阻抗的关系

0.2.4 三、自学资源推荐

数学基础（中文优先）

知识点	推荐资源	说明
复数与欧拉公式	宋浩《复变函数》前几讲	通俗易懂，适合零基础
微积分	宋浩《高等数学》	看导数、积分、级数部分即可
微分方程	宋浩《常微分方程》	重点看一阶和二阶线性 ODE
线性代数	宋浩《线性代数》	重点看矩阵运算和特征值
三角学	高中数学复习视频	回顾三角恒等式

信号与系统辅助理解

资源	说明
郭宝龙《信号与系统》MOOC	西电的精品课，讲解非常系统
3Blue1Brown《傅里叶变换》	直观理解傅里叶变换的本质，强烈推荐！
DR_CAN 信号与系统	讲得很清楚，有中文
《信号与系统》奥本海姆中译本	经典教材，建议作为参考书
MIT OCW 6.003（有中文字幕）	国际顶级课程

电路基础

资源	说明
上海交大《电路分析》	看前几章 RLC 分析即可
模拟电路入门视频	了解电容电感的充放电过程

0.2.5 四、学习路线图（4-6 周）

每天投入 2-3 小时，4-6 周补完所有前置知识

第一周：复数 + 三角学基础

天	内容	目标	对应课件章节
第 1 天	复数的表示和基本运算	能在复平面上画点，能算加减乘除	第一章
第 2 天	欧拉公式及其推导	**能默写欧拉公式**，理解 $e^{j\theta}$ 的含义	第一章
第 3 天	用欧拉公式表示 sin/cos	能在 sin 和复指数之间自由转换	第一、三章
第 4 天	三角恒等式复习	掌握和差化积、倍角公式	第三章
第 5 天	正交性概念	理解不同频率正弦相乘积分 =0 的含义	第三章
周末	复习 + 做自测题	能独立推导欧拉公式和积化和差	

第二周：微积分 + ODE 基础

天	内容	目标	对应课件章节
第 1 天	指数/三角函数的导数和积分	熟练计算	第一 ~ 四章
第 2 天	分部积分法	能处理 te^{-at} 这类积分	第二 ~ 四章
第 3 天	一阶线性 ODE 求解	能解 $\frac{dy}{dt}+ay=x(t)$	第二章
第 4 天	二阶线性 ODE 求解	掌握特征方程法	第二章
第 5 天	零输入 + 零状态响应概念	理解 ODE 解的物理含义	第二章
周末	**做几道完整的 ODE 求解题**	能独立完成一阶和二阶 ODE 求解	

第三周：级数 + 线性代数

天	内容	目标	对应课件章节
第 1 天	几何级数求和（有限和无穷）	**能熟练计算**	第六章
第 2 天	级数收敛性判断	理解 ROC 的概念	第六章
第 3 天	矩阵乘法和逆矩阵	能算 2×2 矩阵的运算	第七章
第 4 天	特征值和特征向量	理解 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$	第七章
第 5 天	矩阵指数 e^{At}	了解定义和意义	第七章
周末	整合复习	建立完整的数学工具观	

第四周：电路基础 + 开始预习课件

天	内容	目标	对应课件章节
第 1 天	RLC 元件特性、欧姆定律、KVL/KCL	理解基本电路	第二、四章
第 2 天	一阶 RC 电路瞬态响应	理解时间常数 τ	第二章
第 3 天	频域阻抗概念	理解 $Z_C = 1/(j\omega C)$	第四章
第 4 天	**预习课件第一章**	快速浏览所有概念	第一章
第 5 天	**预习课件第二章**	看卷积部分	第二章
周末	整理所有笔记，准备开始正式学习	信心满满开始！	

第五 ~ 六周（可选）：如果时间充裕

- 深入学习傅里叶变换的推导
- 看 3Blue1Brown 的傅里叶变换视频
- 尝试做几道完整的信号与系统习题

0.2.6 五、关键公式速查卡

欧拉公式家族

$$\boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta}, \quad \boxed{\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}}, \quad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}}$$

几何级数

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1-r^N}{1-r}}, \quad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r|<1}$$

一阶 ODE 齐次解

$$\boxed{\frac{dy}{dt} + ay = 0 \implies y(t) = Ce^{-at}}$$

时间常数

$$\boxed{\tau = RC = \frac{L}{R}}$$

> **最后的话：**信号与系统是一门美丽的课程。当你学到傅里叶变换时，会发现原来任何信号都可以分解成不同频率的正弦波 —— 就像白光经过三棱镜分成彩虹一样。前期数学基础打得越扎实，后面的学习就越轻松。加油！

本文档基于信号与系统（北京理工大学鲁溟峰）课件分析自动生成

0.3 第 1 章：信号与系统基础

0.3.1 本章学习目标

- 理解信号的各种分类方式
- 掌握信号的基本运算（平移、反转、尺度变换）
- 熟悉典型信号（阶跃、冲激、斜坡、复指数）的数学表达和性质
- 理解系统的分类及各类系统的特点
- 掌握 LTI 系统的特性
- 学会信号的奇偶分解

0.3.2 1.1 什么是信号？什么是系统？

1.1.1 信号的定义

信号 (Signal) 是随时间或空间变化的物理量，是信息的载体。

通俗理解：信号就是" 会变化的东西"——你说话的声波是信号，手机接收的电磁波是信号，心电图上的曲线也是信号。

数学表示：信号可以用一个或多个变量的函数来描述。

$$x(t) \quad \text{（连续时间信号，t 为连续时间变量）}$$

$$x[n] \quad \text{（离散时间信号，n 为整数序号）}$$

1.1.2 系统的定义

系统 (System) 是对信号进行变换、处理的实体。

通俗理解：系统就是" 输入什么，输出什么" 的黑盒子。

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow y(t)$$

系统将输入信号 $x(t)$ 映射为输出信号 $y(t)$，记为：

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

其中 $T\{\cdot\}$ 表示系统施加的变换操作。

0.3.3 1.2 信号的分类

1.2.1 连续时间信号 vs 离散时间信号

连续时间信号 **定义**：自变量 t 在连续时间范围内取值的信号。记作 $x(t)$。

通俗理解：信号在任意时刻都有定义，就像连续不断的流水。

例子：

- 语音信号（声波是连续的）
- 模拟电视信号
- 温度随时间连续变化

数学表示：$x(t)$，其中 $t \in \mathbb{R}$（实数集）。

离散时间信号 **定义**：自变量只在离散时刻取值的信号。记作 $x[n]$，其中 n 为整数。

通俗理解：就像每隔一定时间拍一张照片，而不是连续录像。

例子：

- CD 上的数字音频（每秒钟采样 44100 次）
- 每日股票价格
- 数字照片（像素点阵）

数学表示：$x[n]$，其中 $n \in \mathbb{Z}$（整数集）。

重要：离散时间信号通常用方括号 $[\cdot]$，连续时间信号用圆括号 $(\cdot)$。

采样：从连续到离散　采样是将连续信号转换为离散信号的过程：

$$x[n] = x(nT_s)$$

其中 T_s 是采样间隔（采样周期）。
通俗理解：采样就像是用一个"快门"每隔固定时间记录一次信号的数值。

1.2.2 周期信号 vs 非周期信号

周期信号　**定义**：存在一个正数 T（或正整数 N），使得对所有 t（或 n），有：

$$\text{连续：}\quad x(t+T) = x(t), \quad \forall t$$

$$\text{离散：}\quad x[n+N] = x[n], \quad \forall n$$

最小的正 T（或 N）称为**基本周期**。
通俗理解：周期信号就是按照一定规律重复出现的信号，就像心跳一样有规律。
例子：正弦波 $\sin(\omega_0 t)$、方波、锯齿波。

非周期信号　**定义**：不满足周期性的信号。
通俗理解：没有固定循环模式的信号，就像随机噪声。
例子：语音信号（不规则）、一个单独的脉冲。

常见困惑

问：$x(t) = \sin(2t) + \cos(3t)$ 是周期信号吗？

答：是。$\sin(2t)$ 的周期是 $T_1 = \pi$，$\cos(3t)$ 的周期是 $T_2 = 2\pi/3$。找到两个周期的最小公倍数：$T_1 = \pi = 3\pi/3$，$T_2 = 2\pi/3$，最小公倍数为 2π。所以 $T = 2\pi$。

1.2.3 能量信号 vs 功率信号

信号的能量　对于连续信号 $x(t)$，能量定义为：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

对于离散信号 $x[n]$：

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

信号的平均功率　对于连续信号 $x(t)$，平均功率定义为：

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

对于离散信号 $x[n]$：

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

能量信号　**定义**：能量有限（$E < \infty$）、功率为零的信号。

通俗理解：“一次性的” 信号，如一个单独的脉冲。它的能量是有限的，但平均到无限长时间上功率为零。

例子：一个矩形脉冲、$e^{-t}u(t)$（衰减指数信号）。

功率信号　**定义**：功率有限（$0 < P < \infty$）、能量无限的信号。

通俗理解：“持续不断” 的信号，如正弦波。它在无限长时间上的总能量是无限的，但平均功率是有限的。

例子：正弦信号 $\sin(\omega_0 t)$、周期方波、直流信号 $x(t) = 1$。

重要说明

- 周期信号一定是功率信号（周期重复导致能量无限但功率有限）
- 有限时宽信号一般是能量信号
- 一个信号不能既是能量信号又是功率信号（互斥分类）

1.2.4 确定信号 vs 随机信号

确定信号　**定义**：信号的取值可以被精确地预测和描述。

通俗理解：你知道下一秒信号会是什么值。

例子：$x(t) = \sin(2\pi t)$，任何时刻的值都可以精确计算。

随机信号　**定义**：信号的取值不确定，只能用统计特性描述。

通俗理解：你无法准确预知下一秒的值，只能知道它” 大概” 会是多少。

例子：热噪声、语音信号（部分随机）、通信信道中的干扰。

说明：本课程主要研究确定信号。随机信号属于” 随机信号分析” 课程的内容。

0.3.4 1.3 基本信号运算

1.3.1 信号的平移 (Time Shift)

定义:

$$x(t-t_0) \quad \text{将信号向右平移} t_0$$

$$x(t+t_0) \quad \text{将信号向左平移} t_0$$

通俗理解：- 如果一辆车的位置函数是 $x(t)$，那么 $x(t-2)$ 表示比原来晚出发 2 秒的车——同样的路程，但整体推迟了。- **口诀**："减右加左"——减去正数向右平移，加上正数向左平移。

图解理解:

假设 $x(t)$ 在 $t=0$ 处有一个脉冲峰值。

- $x(t-3)$：峰值出现在 $t=3$（比原来晚了 3 秒，向右移了）
- $x(t+3)$：峰值出现在 $t=-3$（比原来早了 3 秒，向左移了）

为什么是" 减右加左"?

信号 $x(t)$ 在 $t=0$ 处的值，对于 $x(t-t_0)$ 来说，出现在 $t=t_0$ 处。因为当 $t=t_0$ 时，$x(t_0-t_0)=x(0)$。所以整个波形向右移动了 t_0。

1.3.2 信号的反转 (Time Reversal)

定义:

$$y(t)=x(-t)$$

通俗理解：将信号沿纵轴翻转——就像照镜子。

图解理解：- 如果信号 $x(t)$ 像山峰一样从 0 上升到 10 再下降，那么 $x(-t)$ 就是把这个过程反过来——原来最后发生的事现在最先发生。- 想象把录像带倒放，就是时间反转的效果。

类比：把音频文件从结尾到开头播放——这就是时间反转。

1.3.3 信号的尺度变换 (Time Scaling)

定义:

$$y(t)=x(at), \quad a>0$$

- 如果 $a > 1$：信号被**压缩**（在时间轴上变窄）
- 如果 $0 < a < 1$：信号被**扩展**（在时间轴上变宽）

通俗理解：- $a > 1$（压缩）：就像用 2 倍速播放视频——所有事件发生得更快。- $0 < a < 1$（扩展）：就像用 0.5 倍速播放视频——所有事件发生得更慢。

具体例子：

设 $x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$（宽度为 2 的矩形脉冲）

- $x(2t)$：矩形变为 $0 \leq 2t \leq 2 \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$，宽度变为 1（**压缩**）
- $x(t/2)$：矩形变为 $0 \leq t/2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq t \leq 4$，宽度变为 4（**扩展**）

重要提醒：尺度变换中，如果 $a < 0$，则同时包含反转和尺度变换。例如 $x(-2t)$ 先反转再压缩。

1.3.4 综合例题

例题 1：已知 $x(t)$ 的波形，画出 $x(-2t+1)$ 的波形。

解题步骤：

遇到复合变换时，遵循”先尺度/反转，后平移”的原则。

方法一：逐步变换

1. **先反转**：$x(t) \to x(-t)$
2. **再尺度**：$x(-t) \to x(-2t)$（压缩为 1/2）
3. **再平移**：$x(-2t) \to x(-2(t-1/2)) = x(-2t+1)$（向右平移 1/2）

方法二：提取变换形式

原式 $x(at+b)$ 中 $a = -2, b = 1$。写成 $x(a(t+b/a)) = x(-2(t-1/2))$ - 先尺度：$x(-2t)$（反转 + 压缩为 1/2）- 再平移：向右平移 $\frac{1}{2}$

0.3.5 1.4 典型信号

1.4.1 单位阶跃信号 $u(t)$

定义：

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

通常在 $t = 0$ 处不定义，或者定义为 $u(0) = 1/2$。

通俗理解：就像一个开关——在 $t = 0$ 时刻之前是关的（0），之后是开的（1）。

图形：

```
x(t)
 1
   |
   |
 0    |  → t
        0
```

重要性质：- $u(t)$ 在 $t = 0$ 处有一个跳变（不连续点）- $u(t)$ 的导数是 $\delta(t)$（单位冲激信号，后面介绍）- $u(t) + u(-t) = 1$（除了 $t = 0$）- $u(t) - u(t - T)$ 表示从 0 到 T 的矩形脉冲

离散时间单位阶跃 $u[n]$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

注意：离散情况下 $u[0] = 1$，与连续版本不同。

1.4.2 单位冲激信号 $\delta(t)$

定义（通过极限过程）：

$\delta(t)$ 是一种**广义函数**，满足：

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

通俗理解：冲激信号是一个" 无限高、无限窄、面积为 1" 的脉冲。就像用锤子瞬间敲击一个物体——力量是瞬间施加的。

重要性质：

1. **筛选性质（采样性质）**：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0)}$$

通俗理解：冲激信号就像是一个" 采样器"——它可以把函数在某一点的值提取出来。

2. **与普通函数的乘积**：

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

3. **偶函数性**：$\delta(-t) = \delta(t)$

4. **尺度变换**:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

5. **阶跃函数的导数**:

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

离散时间单位脉冲 $\delta[n]$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

离散冲激就是一个简单的"1"，比连续情况简单得多！

离散筛选性质:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]$$

1.4.3 斜坡信号 $r(t)$

定义:

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = t \cdot u(t)$$

通俗理解：从 $t = 0$ 开始以斜率 1 线性增长的信号。就像水龙头开始放水后，累积流出的水量。

与阶跃、冲激的关系:

$$\frac{d}{dt}r(t) = u(t), \quad \frac{d^2}{dt^2}r(t) = \delta(t)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau} \delta(\sigma)d\sigma d\tau$$

图形:

```
x(t)
  ↑
```

```
        斜率=1




 0   → t
```

1.4.4 复指数信号 e^{st}

定义：

$$x(t) = e^{st}, \quad s = \sigma + j\omega(\text{复数})$$

这是一个最”万能”的信号——因为它包含了多种特殊情形：

s 的取值	信号形式	物理意义
$\sigma = 0, \omega = 0$	1	直流信号
$\sigma < 0, \omega = 0$	$e^{-\alpha t}$	实指数衰减
$\sigma > 0, \omega = 0$	$e^{\alpha t}$	实指数增长
$\sigma = 0, \omega > 0$	$e^{j\omega t}$	等幅正弦振荡
$\sigma < 0, \omega > 0$	$e^{-\alpha t}e^{j\omega t}$	衰减振荡
$\sigma > 0, \omega > 0$	$e^{\alpha t}e^{j\omega t}$	增长振荡

复指数信号与正余弦的关系（欧拉公式）

$$\boxed{e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)}$$

逆欧拉公式：

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

通俗理解：复指数信号是信号的”原子”——就像物质由原子组成一样，任意信号都可以分解为复指数信号的组合。这正是傅里叶变换和拉普拉斯变换的基础思想！

为什么复指数信号这么重要？

因为复指数信号是 LTI 系统的**特征函数**——系统输入复指数信号，输出仍然是同频率的复指数信号（可能幅度和相位不同）。这一点在后续章节中会反复用到。

0.3.6 1.5 系统的分类

1.5.1 线性系统 vs 非线性系统

线性系统 定义：满足**齐次性**和**叠加性**的系统。

- **齐次性**（比例性）：若 $x(t) \to y(t)$，则 $ax(t) \to ay(t)$
- **叠加性**（可加性）：若 $x_1(t) \to y_1(t)$，$x_2(t) \to y_2(t)$，则 $x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$

合在一起就是**线性性**：

$$\boxed{ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)}$$

通俗理解：线性系统就是”按比例放大、分开处理”的系统。输入加倍，输出也加倍；多个输入叠加，输出也对应叠加。

判断方法：检查系统是否满足 $T\{ax_1 + bx_2\} = aT\{x_1\} + bT\{x_2\}$。

非线性系统 定义：不满足线性性的系统。

例子：- $y(t) = x^2(t)$（平方运算，输出与输入不成比例）- $y(t) = \sin(x(t))$（非线性函数）- $y(t) = |x(t)|$ (绝对值运算，不满足齐次性：$|-2| = 2$，但 $|-1 \times 2| \neq -1 \times |2| = -2$)

1.5.2 时变系统 vs 时不变系统

时不变系统（Time-Invariant） **定义**：系统特性不随时间变化。如果输入延迟 t_0，输出也延迟同样的 t_0。

若 $x(t) \to y(t)$，则：

$$\boxed{x(t - t_0) \to y(t - t_0)}$$

通俗理解：今天输入信号和明天输入同样的信号，得到同样的输出。系统本身不会”老化”。

判断方法：检查系统参数是否与时间 t 显式相关（作为独立变量，而非函数参数）。

时变系统 定义：系统特性随时间变化。

例子：- $y(t) = \sin(t) \cdot x(t)$（$\sin(t)$ 是时变系数，系统特性随时间变化）- 对比 $y(t) = \sin(x(t))$ —— 这是时不变的，因为 $\sin(\cdot)$ 本身不随时间变，只是作用于 $x(t)$

判断小技巧：

将系统的输出表达式中，除 x 的自变量外，如果在其他地方出现 t，则一般是时变系统。

- $y(t) = t \cdot x(t)$ —— **时变**（t 独立出现）
- $y(t) = x(2t)$ —— **时变**（时间尺度变换）
- $y(t) = \cos(x(t))$ —— **时不变**（t 只出现在 x 中）

1.5.3 因果系统 vs 非因果系统

因果系统　定义：系统的输出只依赖于当前和过去的输入，不依赖于未来的输入。

$$\boxed{y(t_0) \text{ 只取决于} x(t) \text{ 在} t \leq t_0 \text{ 时的值}}$$

通俗理解：因果系统不能”预知未来”——它只能根据已经发生的事情做出反应。

例子：- $y(t) = x(t) + x(t-1)$（因果：只用到现在和过去的值）- $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ (因果：积分只到当前时刻)

非因果系统　定义：输出来依赖于未来输入的系统。

例子：- $y(t) = x(t+1)$（需要未来值）- $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau$（需要所有时刻的值）

实际意义：所有物理上可实现的系统都是因果的（因为我们无法预知未来）。非因果系统通常用于信号处理中的”事后分析”（如对已记录的数据进行处理时，可以”看到”未来）。

1.5.4 稳定系统 vs 非稳定系统

BIBO 稳定　定义：对任意有界输入，输出也有界（BIBO: Bounded-Input Bounded-Output）。

如果 $|x(t)| \leq B_x < \infty$（对所有 t），则存在 B_y 使得 $|y(t)| \leq B_y < \infty$。

通俗理解：系统不会”爆炸”——输入有限，输出也有限。

例子：- $y(t) = e^{-t}x(t)$ (稳定：即使 $x(t)$ 很大，乘以 e^{-t} 后也会衰减) - $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ (非稳定：如果 $x(t) = 1$（有界），积分会无限增长)

1.5.5 有记忆系统 vs 无记忆系统

无记忆系统　定义：当前输出只取决于当前输入。

$$y(t_0) \text{ 只取决于} x(t_0)$$

例子：- $y(t) = 2x(t)$（电阻 $v = iR$）- $y(t) = x^2(t)$

有记忆系统 **定义**：当前输出取决于过去或未来的输入。

例子：- $y(t) = x(t) + x(t-1)$（需要记住上一个输入值）- $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$（需要记住所有过去的值）- 电容器：$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$（电流取决于电压的变化率）

0.3.7 1.6 LTI 系统的特性

1.6.1 什么是 LTI 系统?

LTI = Linear Time-Invariant（线性时不变）

这是信号与系统课程中最重要的一类系统，因为：

1. **数学上容易处理**：可以用卷积、傅里叶变换、拉普拉斯变换等工具分析
2. **物理上普遍存在**：很多实际系统可以近似为 LTI 系统（RLC 电路、机械振动系统等）
3. **可以分解分析**：任意输入的响应可以分解为对基本信号的响应

1.6.2 LTI 系统的研究思路

```
任意输入 x(t) → 分解为基本信号 → 分别求响应 → 叠加得到总响应
```

这个思路类似于：1. 把复杂问题分解为简单问题 2. 分别解决简单问题 3. 把解组合起来

1.6.3 描述 LTI 系统的方法

方法	适用域	第几章学
微分方程/差分方程	时域	第 2 章、第 5 章
卷积积分/卷积和	时域	第 2 章、第 5 章
冲激响应 $h(t)/h[n]$	时域	第 2 章、第 5 章
频率响应 $H(j\omega)$	频域	第 3 章
系统函数 $H(s)/H(z)$	复频域	第 4 章、第 6 章

0.3.8 1.7 信号的分解

1.7.1 奇偶分解

任何一个信号都可以分解为**偶部** (Even Part) 和**奇部** (Odd Part)。

偶信号：$x_e(t) = x_e(-t)$（关于纵轴对称）

奇信号：$x_o(t) = -x_o(-t)$（关于原点对称）

分解公式

$$\boxed{x(t) = x_e(t) + x_o(t)}$$

其中：

$$\boxed{x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}}$$

$$\boxed{x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}}$$

证明（验证分解公式）

$$x_e(t) + x_o(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} + \frac{x(t) - x(-t)}{2} = \frac{2x(t)}{2} = x(t)$$

验证偶部对称性：

$$x_e(-t) = \frac{x(-t) + x(t)}{2} = x_e(t) \quad \checkmark$$

验证奇部对称性：

$$x_o(-t) = \frac{x(-t) - x(t)}{2} = -\frac{x(t) - x(-t)}{2} = -x_o(t) \quad \checkmark$$

通俗理解

- **偶部**：信号关于纵轴的对称部分（"镜像对称"）
- **奇部**：信号关于原点的反对称部分（"镜像反转"）

例题　例题 2：求 $x(t) = e^{-at}u(t)$ 的偶部和奇部。

解：

偶部：

$$x_e(t) = \frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2}$$

奇部：

$$x_o(t) = \frac{e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)}{2}$$

验证：在 $t > 0$ 时，$x_e(t) = e^{-at}/2$，$x_o(t) = e^{-at}/2$；在 $t < 0$ 时，$x_e(t) = e^{at}/2$，$x_o(t) = -e^{at}/2$。相加确实得到 $x(t)$。

1.7.2 其他分解方式

除了奇偶分解，信号还可以按以下方式分解：

1. **脉冲分解**：将信号分解为一系列冲激信号的叠加

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

   这是卷积积分的基础，在第 2 章会详细讲。

2. **正弦分解**：将信号分解为不同频率正弦波的叠加
   这是傅里叶级数和傅里叶变换的基础，在第 3 章会详细讲。
3. **复指数分解**：将信号分解为复指数信号的叠加
   这是拉普拉斯变换的基础，在第 4 章会详细讲。

0.3.9 1.8 本章典型例题

例题 3：判断信号类型

判断以下信号是能量信号还是功率信号：

(1) $x(t) = \sin(2t)$

解：正弦波是周期信号，周期信号都是功率信号。

验证：计算平均功率

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \sin^2(2t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \frac{1-\cos(4t)}{2}dt = \frac{1}{2}$$

功率为有限值 $1/2$，所以是功率信号。

(2) $x(t) = e^{-|t|}$

解：

计算能量：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|}dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-2t}dt = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 < \infty$$

能量有限，所以是**能量信号。**

例题 4：判断系统特性

判断系统 $y(t) = x(t) + x(t-1)$ 的特性。

解：

1. **线性**：$T\{ax_1 + bx_2\} = ax_1(t) + ax_1(t-1) + bx_2(t) + bx_2(t-1) = aT\{x_1\} + bT\{x_2\}$
   线性
2. **时不变**：

- 先时移再系统：输入 $x(t-t_0)$，输出 $x(t-t_0)+x(t-t_0-1)$
- 先系统再时移：$y(t-t_0)=x(t-t_0)+x(t-t_0-1)$
- 两者相等 时不变

3. **因果**：输出只用到 $x(t)$（当前）和 $x(t-1)$（过去） 因果
4. **稳定**：如果 $|x(t)|\le B$，则 $|y(t)|\le|x(t)|+|x(t-1)|\le 2B$ BIBO 稳定
5. **有记忆**：输出依赖于过去的输入 有记忆

例题 5：奇偶分解

求 $x(t)=u(t)$ 的偶部和奇部。

解：

偶部：

$$x_e(t)=\frac{u(t)+u(-t)}{2}=\frac{1}{2},\quad t\neq 0$$

注意：在 $t=0$ 处有跳变，但在 $t\neq 0$ 时 $u(t)+u(-t)=1$。

奇部：

$$x_o(t)=\frac{u(t)-u(-t)}{2}=\begin{cases}1/2, & t>0\\ -1/2, & t<0\end{cases}$$

这是一个符号函数的一半：$x_o(t)=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$。

验证：$x_e(t)+x_o(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)=u(t)$

0.3.10 1.9 零基础学生常见困惑

Q1：信号到底是什么？感觉太抽象了

A：不要想得太复杂。信号就是”会变化的东西”的数学表示。温度随时间是信号（温度-时间函数），声音随时间是信号（声压-时间函数），图片是信号（亮度-空间函数）。这门课里，信号就是 $x(t)$ 或 $x[n]$，**仅此而已。**

Q2：为什么离散信号用方括号 [] 而连续用圆括号 ()?

A：这是一种约定俗成的记号法，帮助区分连续和离散。圆括号 (t) 表示 t 是连续实数，方括号 $[n]$ 表示 n 是整数。考试时写错了可能会扣分，所以要养成习惯。

Q3：冲激函数 $\delta(t)$ 到底是不是函数？

A：严格来说 $\delta(t)$ 不是普通函数，是”广义函数”或”分布”。普通函数在 $t=0$ 处需要有一个有限的值，而 $\delta(0)$ 是”无限大”。在实际应用中，把它想象成”一个无限窄、无限高、面积为 1 的脉冲”就足够了。**做题时不需要纠结严格定义，会用筛选性质就行。**

Q4: 时不变性和时变性好难判断

A：记住关键点——**输入延迟后，输出是否也延迟相同量。**

简单判断法：写出系统表达式，看看除了 x 的参数以外，是否有 t 独立出现（作为 x 的系数等）。如果有，一般是时变。

但要注意：- $y(t) = x(-t)$ 是时变（时间反转改变了时间顺序）- $y(t) = x(2t)$ 是时变(时间压缩)

Q5: 怎么判断因果系统?

A：问自己一个问题——计算 t_0 时刻的输出时，需不需要知道 t_0 以后（未来）的输入值?

- 如果 $y(t_0)$ 只依赖于 $t \leq t_0$ 时的 $x(t) \to$ 因果
- 如果 $y(t_0)$ 依赖于 $t > t_0$ 时的 $x(t) \to$ 非因果

典型例子：- $y(t) = x(t-1)$：因果（只用过去）- $y(t) = x(t+1)$：非因果（需要未来）- $y(t) = x(2t)$：当 $t > 0$ 时，$y(1) = x(2)$ 需要未来值 $\to$ 非因果

Q6: 什么是信号的" 维度"?

A：本课程讨论一维信号 $x(t)$，只有一个自变量 t。图像是二维信号 $f(x, y)$，有两个空间自变量。视频是三维信号 $f(x, y, t)$。虽然本课程只学一维，但基本概念可以推广到多维。

Q7: 学了信号分类有什么用?

A：分类是为了**选择合适的分析工具**:

信号类型	适用工具
周期信号	傅里叶级数
非周期能量信号	傅里叶变换
非周期功率信号	可能需要功率谱分析
连续信号	微分方程、卷积积分
离散信号	差分方程、卷积和

0.3.11 1.10 本章小结

知识点网络图

信号与系统基础

信号的分类

```
    连续 vs 离散
    周期 vs 非周期
    能量 vs 功率
    确定 vs 随机

信号的运算
    平移（减右加左）
    反转（照镜子）
    尺度变换（快放/慢放）

典型信号
    u(t) 阶跃（开关）
     (t) 冲激（瞬间冲击）
    r(t) 斜坡（线性增长）
    e^{st} 复指数（万能信号）

系统分类
    线性/非线性
    时变/时不变
    因果/非因果
    稳定/非稳定
    有记忆/无记忆

信号分解
     奇部 + 偶部
```

必须掌握的能力

1. 能判断一个信号是连续还是离散、周期还是非周期、能量还是功率
2. 能熟练画出经过平移、反转、尺度变换后的信号波形
3. 能写出阶跃、冲激、斜坡信号的表达式并知道它们之间的关系
4. 能判断系统的线性、时不变性、因果性、稳定性
5. 能计算信号的奇部和偶部

下一章预告

第 2 章将学习**连续时间系统的时域分析**——利用微分方程和卷积积分来求解系统对任意输入的响应。这是掌握 LTI 系统分析的第一步。

0.4 第 2 章：连续时间系统时域分析

0.4.1 本章学习目标

- 理解系统如何用微分方程描述
- 掌握零输入响应和零状态响应的概念和求解方法
- 理解冲激响应 $h(t)$ 的意义
- 掌握卷积积分的定义和计算（特别是图形法）
- 熟悉卷积的运算性质
- 理解系统的因果性和稳定性的时域判据

0.4.2 2.1 系统的微分方程描述

2.1.1 为什么用微分方程?

在物理世界中，很多系统的行为可以用**微分方程**来描述。例如：

- **RC 电路**：$RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t)$
- **弹簧-质量-阻尼系统**：$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t)$

通俗理解：微分方程描述的是" 系统当前状态如何随着时间变化" 的规则。就像天气预报用微分方程描述大气如何变化一样。

2.1.2 一般形式的微分方程

一个 N 阶 LTI 系统的微分方程一般形式为：

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}}$$

其中：- $y(t)$ 是输出信号 - $x(t)$ 是输入信号 - a_k, b_k 是常数系数（因为是**时不变**系统）- 方程是线性的（因为是**线性**系统）- N 是系统的阶数（最高微分阶数）

展开形式：

$$a_N \frac{d^N y}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_M \frac{d^M x}{dt^M} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x(t)$$

2.1.3 初始条件

微分方程的求解需要**初始条件**——系统在 $t = 0$ 时刻的状态。

对于 N 阶系统，需要 N 个初始条件：

$$y(0^-), \quad y'(0^-), \quad y''(0^-), \quad \cdots, \quad y^{(N-1)}(0^-)$$

其中 0^- 表示" 刚刚在 0 时刻之前"，用于包含可能存在的初始储能。

0.4.3 2.2 零输入响应和零状态响应

2.2.1 系统响应的分解

对于一个 LTI 系统，总响应可以分解为：

$$\boxed{y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)}$$

其中：- **零输入响应** $y_{zi}(t)$：输入为零时，仅由初始状态（初始储能）引起的响应 - **零状态响应** $y_{zs}(t)$：初始状态为零时，仅由输入信号引起的响应

通俗理解：- 零输入响应：就像一个杯子里的水（初始储能）自己慢慢蒸发，没有新水加入 - 零状态响应：就像往一个空杯子里倒水（输入信号），水慢慢涨起来

2.2.2 零输入响应 $y_{zi}(t)$

求解步骤：

1. 令输入 $x(t) = 0$，得到齐次微分方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

2. 写出**特征方程**：

$$a_N \lambda^N + a_{N-1} \lambda^{N-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

3. 解特征方程得到特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$
4. 根据特征根的形式写出齐次解：
   - **单实根** λ：$Ce^{\lambda t}$
   - r **重实根** λ：$(C_0 + C_1 t + \cdots + C_{r-1} t^{r-1}) e^{\lambda t}$
   - **共轭复根** $\lambda = \alpha \pm j\beta$：$e^{\alpha t}[A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)]$
5. 利用初始条件确定常数

例题 1：求解零输入响应 系统由微分方程 $\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{dx}{dt} + 2x(t)$ 描述，初始条件 $y(0^-) = 1$，$y'(0^-) = 0$，求零输入响应。

解：

令 $x(t) = 0$，得齐次方程：

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = 0$$

特征方程：

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

特征根:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

两个不相等实根，所以齐次解形式为:

$$y_{zi}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

利用初始条件:

$$y_{zi}(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$y'_{zi}(0) = -C_1 - 2C_2 = 0$$

解得：$C_1 = 2$，$C_2 = -1$
所以:

$$\boxed{y_{zi}(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0}$$

2.2.3 零状态响应 $y_{zs}(t)$

求解思路:

零状态响应可以通过两种方法求：1. **直接法**：解非齐次微分方程（齐次解 + 特解），用零初始条件确定常数 2. **卷积法**：$y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$（后面详细讲）

非齐次微分方程的求解 对于一般形式的微分方程:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

零状态响应的求解步骤:

1. **求齐次解**（形式与零输入响应相同，但系数不同）
2. **求特解**：根据输入 $x(t)$ 的形式设特解形式

输入信号形式	特解形式
常数 A	常数 C
e^{at}	Ce^{at}（a 不是特征根时）
t^m	$C_0 + C_1 t + \cdots + C_m t^m$

输入信号形式	特解形式
$\sin(\omega t)$ 或 $\cos(\omega t)$	$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

3. **完全解 = 齐次解 + 特解**
4. **用零初始条件** $y(0^-) = 0, y'(0^-) = 0, \cdots$ 确定齐次解系数

例题 2：求解零状态响应　系统同上例，输入 $x(t) = u(t)$，求零状态响应。

解:

齐次解形式：$y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$

输入 $x(t) = u(t)$（$t > 0$ 时为常数 1），设特解为常数 $y_p(t) = K$

代入微分方程：

$$0 + 0 + 2K = 0 + 2 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad 2K = 2 \quad \Rightarrow \quad K = 1$$

所以 $y_p(t) = 1$

完全解：

$$y_{zs}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + 1, \quad t \geq 0$$

零初始条件：$y_{zs}(0) = 0$，$y'_{zs}(0) = 0$

$$y_{zs}(0) = C_1 + C_2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = -1$$

$$y'_{zs}(0) = -C_1 - 2C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + 2C_2 = 0$$

解得：$C_1 = -2$，$C_2 = 1$

所以：

$$\boxed{y_{zs}(t) = -2e^{-t} + e^{-2t} + 1, \quad t \geq 0}$$

完整响应:

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = (2e^{-t} - e^{-2t}) + (-2e^{-t} + e^{-2t} + 1) = 1, \quad t \geq 0$$

这是一个很有趣的结果——总响应是常数 1。这是因为系统的固有模式被输入” 抵消” 了。

0.4.4 2.3 系统的冲激响应 $h(t)$

2.3.1 冲激响应的定义

冲激响应是系统在零初始条件下，对单位冲激信号 $\delta(t)$ 的响应：

$$\boxed{\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow h(t)}$$

通俗理解：- 冲激响应是系统的" 指纹"——每个系统都有自己独特的冲激响应 - 就像用锤子敲一下系统（冲激输入），看它如何振动（响应）

2.3.2 如何求冲激响应

对于 N 阶系统：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x}{dt^k}$$

求 $h(t)$ 的步骤：

1. **先求** $h_0(t)$：系统 $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y}{dt^k} = x(t)$ 的冲激响应
2. 利用线性性质：$h(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k h_0(t)}{dt^k}$

求 $h_0(t)$ **的方法**：

$h_0(t)$ 满足齐次方程和特定的初始条件。当 $t > 0$ 时，$\delta(t) = 0$，所以 $h_0(t)$ 是齐次解的形式。

关键：利用冲激信号在 $t = 0$ 处产生的跳变确定初始条件。

对于 N 阶系统，$h_0(t)$ 在 $t = 0$ 处产生如下初始条件：

$$h_0^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N}, \quad h_0^{(k)}(0^+) = 0 \text{ for } k < N - 1$$

例题 3：求冲激响应 系统 $\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{dx}{dt} + 2x(t)$，求冲激响应 $h(t)$。

解：

第一步：先求 $h_0(t)$，即方程 $\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = x(t)$ 的冲激响应。

特征根：$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

齐次解形式：$h_0(t) = (C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t})u(t)$

初始条件（注意：方程中 $a_2 = 1$）：

$$h_0'(0^+) = \frac{1}{a_2} = 1, \quad h_0(0^+) = 0$$

由 $h_0(0^+) = C_1 + C_2 = 0$ 由 $h_0'(0^+) = -C_1 - 2C_2 = 1$

解得：$C_1 = 1$，$C_2 = -1$

所以：

$$h_0(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

第二步：利用线性性质
原方程右端是 $\frac{dx}{dt} + 2x(t)$，所以：

$$h(t) = \frac{dh_0(t)}{dt} + 2h_0(t)$$

计算：

$$\frac{dh_0}{dt} = (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta(t)$$

注意 $t = 0$ 时 $(e^{-t} - e^{-2t}) = 0$，所以 $\delta(t)$ 项为零。

$$\frac{dh_0}{dt} = (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$

因此：

$$h(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t) + 2(e^{-t} - e^{-2t})u(t) = (e^{-t})u(t)$$

最终答案：

$$\boxed{h(t) = e^{-t}u(t)}$$

2.3.3 冲激响应的物理意义

冲激响应完全描述了 LTI 系统。一旦知道 $h(t)$，就可以求出系统对任意输入的响应——这正是卷积的思想。

0.4.5 2.4 卷积积分

2.4.1 卷积的定义

两个函数 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的卷积定义为：

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

通俗理解：- 卷积是两个信号”混合”的运算 - 一个信号 $x(t)$ 经过 LTI 系统 $h(t)$ 的输出就是它们的卷积

2.4.2 卷积的物理意义：冲激分解

为什么卷积可以求系统响应？因为任何信号都可以分解为冲激信号的叠加：

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

利用 LTI 系统的线性性和时不变性：- 对 $\delta(t-\tau)$ 的响应是 $h(t-\tau)$ - 对 $x(\tau)\delta(t-\tau)$ 的响应是 $x(\tau)h(t-\tau)$ - 对所有 τ 求和（积分）得到 $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

这就是卷积的来历！

2.4.3 卷积的图形解释（核心！）

卷积的计算可以分解为四个步骤：

$$\boxed{\text{翻转} \rightarrow \text{平移} \rightarrow \text{相乘} \rightarrow \text{积分}}$$

对于 $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$：

1. **翻转** (Folding)：将 $h(\tau)$ 反转为 $h(-\tau)$
2. **平移** (Shifting)：将 $h(-\tau)$ 平移 t 得到 $h(t-\tau)$
3. **相乘** (Multiplication)：将 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 相乘
4. **积分** (Integration)：计算乘积曲线下的面积，得到 $y(t)$

逐步理解（用图像思维）：

假设 $x(t)$ 是一个矩形脉冲，$h(t)$ 是一个指数衰减函数。

步骤 1：画出 $x(\tau)$ 和 $h(\tau)$（以 τ 为变量）

```
x( )                h( )
 1                  1


         →
    0    1              0   →
```

步骤 2：翻转 $h(\tau)$ 得到 $h(-\tau)$

```
h(- )
    1



  →
```

步骤 3：平移 t 得到 $h(t-\tau)$。当 t 变化时，$h(t-\tau)$ 左右移动。

步骤 4：对每个 t，计算 $x(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 乘积的积分。

例题 4：卷积的图形计算 已知 $x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，$h(t) = e^{-t}u(t)$，求 $y(t) = x(t) * h(t)$。

解：

方法一：直接积分

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^1 1 \cdot e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$u(t-\tau)$ 要求 $t-\tau > 0$，即 $\tau < t$。

所以积分上限为 $\min(1,t)$：

情况 1：$t < 0$，$u(t-\tau) = 0$，$y(t) = 0$

情况 2：$0 \le t < 1$

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau = e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau = e^{-t}[e^{\tau}]_0^t = e^{-t}(e^t - 1) = 1 - e^{-t}$$

情况 3：$t \ge 1$

$$y(t) = \int_0^1 e^{-(t-\tau)}d\tau = e^{-t}\int_0^1 e^{\tau}d\tau = e^{-t}(e-1)$$

所以：

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-t}, & 0 \le t < 1 \\ (e-1)e^{-t}, & t \ge 1 \end{cases}}$$

方法二：图形法（翻转-平移-相乘-积分）

这是理解卷积本质的最好方法，建议大家一定要自己画图走一遍。

对于不同的 t 值：

$t < 0$ **时**：$h(t-\tau)$ 在 τ 的负半轴，与 $x(\tau)$ 没有重叠 → 乘积为 $0 \to y(t) = 0$

```
x( )                h(t- ) (t<0)
 1


        →      →

   0    1
```

$0 \le t < 1$ **时**：部分重叠，重叠区间为 $[0,t]$

```
x( )              h(t- )
 1
```

```
      →
  0   t 1
```

$t \geq 1$ **时**：完全重叠，重叠区间为 $[0, 1]$

```
x( )          h(t- )
 1


      →
  0   1   t
```

2.4.4 卷积的性质

1. 交换律

$$\boxed{x(t) * h(t) = h(t) * x(t)}$$

意义：系统的输入输出可以互换角色。从计算角度，可以选择更容易的函数进行翻转。

2. 分配律

$$\boxed{x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)}$$

意义：并联系统的总冲激响应等于各子系统冲激响应之和。

```
            h (t)
x(t)                    y(t)
            h (t)
```

$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$

3. 结合律

$$\boxed{[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]}$$

意义：级联系统的总冲激响应等于各子系统冲激响应的卷积。

```
x(t)  → h (t)  → h (t)  → y(t)
```

等价于：

```
x(t)  → [h (t) * h (t)]  → y(t)
```

4. 卷积的微分性质

$$\boxed{\frac{d}{dt}[x(t)*h(t)] = \frac{dx(t)}{dt}*h(t) = x(t)*\frac{dh(t)}{dt}}$$

意义：可以先微分再卷积，有时可以简化计算。

5. 卷积的积分性质

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t}[x(\tau)*h(\tau)]d\tau = \left[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\right]*h(t) = x(t)*\left[\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau\right]}$$

6. 信号与冲激的卷积

$$\boxed{x(t)*\delta(t) = x(t)}$$

$$\boxed{x(t)*\delta(t-t_0) = x(t-t_0)}$$

意义：冲激信号是卷积的单位元。

7. 信号与阶跃的卷积

$$x(t)*u(t) = \int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

例题 5：利用性质简化计算 已知 $x(t)=e^{-t}u(t)$，$h(t)=u(t)$，求 $y(t)=x(t)*h(t)$。

解：

方法一：直接积分

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t}e^{-\tau}d\tau = (1-e^{-t})u(t)$$

方法二：利用性质

$h(t)=u(t)$，$x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t}e^{-\tau}u(\tau)d\tau = \int_{0}^{t}e^{-\tau}d\tau\cdot u(t) = (1-e^{-t})u(t)$$

2.4.5 卷积的几种计算方法总结

方法	适用情况	说明
定义直接积分	简单函数	直接用公式算
图形法	分段函数	直观但繁琐

方法	适用情况	说明
性质法	典型函数	利用已知性质和变换对
变换域法	复杂函数	用拉普拉斯变换或傅里叶变换（后续章节）

0.4.6 2.5 用卷积求系统响应

2.5.1 基本思路

对于 LTI 系统：

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$$

这就是系统对任意输入 $x(t)$ 的**零状态响应**。

2.5.2 完整求解流程

求解 LTI 系统对任意输入的响应：

1. 写出系统的微分方程
2. 求零输入响应 $y_{zi}(t)$（解齐次方程 + 初始条件）
3. 求冲激响应 $h(t)$
4. 求零状态响应 $y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$
5. 总响应 $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$

例题 6：完整系统求解 系统 $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{dx}{dt} + 2x(t)$，初始条件 $y(0^-) = 1, y'(0^-) = 0$，输入 $x(t) = e^{-3t}u(t)$。

解：

(1) **零输入响应**（前面已求）：

$$y_{zi}(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

(2) **冲激响应**（前面已求）：

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

(3) **零状态响应**：

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\tau}u(\tau) \cdot e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$u(\tau)$ 要求 $\tau > 0$，$u(t-\tau)$ 要求 $\tau < t$。

所以当 $t>0$ 时：

$$y_{zs}(t)=\int_0^t e^{-3\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}\int_0^t e^{-2\tau}d\tau=e^{-t}\cdot\left[-\frac{1}{2}e^{-2\tau}\right]_0^t$$

$$=e^{-t}\cdot\frac{1}{2}(1-e^{-2t})=\frac{1}{2}e^{-t}(1-e^{-2t})=\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}),\quad t\geq 0$$

当 $t<0$ 时：$y_{zs}(t)=0$

所以 $y_{zs}(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})u(t)$

(4) **完全响应**：

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(2e^{-t}-e^{-2t})+\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})$$

$$\boxed{y(t)=\frac{5}{2}e^{-t}-e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-3t},\quad t\geq 0}$$

0.4.7 2.6 系统因果性和稳定性的时域判据

2.6.1 因果性的时域判据

定理：一个 LTI 系统是因果的，当且仅当它的冲激响应满足：

$$\boxed{h(t)=0,\quad t<0}$$

通俗理解：因果系统对输入信号的响应不能早于输入本身。如果 $t=0$ 时刻输入冲激，那么在 $t<0$ 时系统不应该有任何反应。

验证：

如果系统是因果的，那么输出 $y(t)$ 只依赖于 t 及 t 之前的输入：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

只有当 $t-\tau<0$ 即 $\tau>t$ 时 $h(t-\tau)=0$ 才成立。即 $h(t)=0$ 当 $t<0$。

例题 7：判断因果性 判断以下冲激响应是否对应因果系统：(1) $h(t)=e^{-t}u(t)$ (2) $h(t)=e^{-|t|}$ (3) $h(t)=e^{-t}u(t+1)$

解：

(1) $h(t)=0$ 当 $t<0$（因为 $u(t)=0$），所以是**因果**的。

(2) $h(t)=e^{-|t|}$，当 $t<0$ 时，$h(t)=e^{t}\neq 0$，所以是**非因果**的。

(3) $h(t)=e^{-t}u(t+1)$，当 $t<-1$ 时 $h(t)=0$，但当 $t\in(-1,0)$ 时 $h(t)=e^{-t}\neq 0$。由于 $h(t)$ 在 $t<0$ 时不恒为零，所以是**非因果**的。

2.6.2 稳定性的时域判据

定理：一个 LTI 系统是 BIBO 稳定的，当且仅当它的冲激响应**绝对可积**：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty}$$

通俗理解：冲激响应曲线下的总面积是有限的。

证明思路　如果输入有界：$|x(t)| \leq B$

那么输出：

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau \leq B\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau$$

所以如果 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau$ 有限，则 $|y(t)|$ 有界。

例题 8：判断稳定性　判断以下冲激响应是否对应稳定系统：(1) $h(t) = e^{-t}u(t)$ (2) $h(t) = e^{t}u(-t)$ (3) $h(t) = u(t)$

解：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-t}u(t)|dt = \int_0^{\infty} e^{-t}dt = 1 < \infty$，**稳定。**

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} |e^{t}u(-t)|dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t}dt = 1 < \infty$，**稳定。**(注意：虽然 e^t 在正方向增长，但 $u(-t)$ 限制了只在负方向有值，而负方向是衰减的)

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|dt = \int_0^{\infty} 1dt = \infty$，**不稳定。**

2.6.3 因果性和稳定性的综合判断

对于因果系统（$h(t) = 0, t < 0$），稳定性条件简化为：

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} |h(t)|dt < \infty}$$

对于形如 $h(t) = \sum_k C_k e^{\lambda_k t}u(t)$ 的因果系统，稳定性的充分必要条件是所有特征根的实部为负：

$$\boxed{\Re\{\lambda_k\} < 0, \quad \forall k}$$

通俗理解：系统的所有" 固有模式" 都随时间衰减，而不是增长。

例题 9：综合判断　某因果系统的冲激响应为 $h(t) = e^{-2t}\cos(3t)u(t)$，判断系统稳定性。

解：

$$\int_0^\infty |e^{-2t}\cos(3t)|dt \le \int_0^\infty e^{-2t}dt = \frac{1}{2} < \infty$$

所以系统**稳定。**

另一种方法：特征根是 $-2 \pm j3$，实部为 $-2 < 0$，所以稳定。

0.4.8 2.7 零基础学生常见困惑

Q1: 卷积为什么叫”卷积”?

A：这个名称来源于运算过程。在卷积中，一个函数先被”翻转”（convolved），然后与另一个函数”卷”在一起。英文 convolution 来自拉丁语 convolvere，意思是”卷在一起”。中文”卷积”正是这个意思。

Q2: 卷积的四个步骤记不住怎么办?

A：记住口诀“**翻平移乘积**”：翻转 $\to$ 平移 $\to$ 相乘 $\to$ 积分（乘积的积分）。多画图练习几次，重点是理解**重叠面积**随着平移量 t 变化而变化的规律。

Q3: 零输入响应和零状态响应有什么区别?

A：- **零输入**：系统内部”存储”的能量自己释放（相当于系统的”记忆”或”惯性”）- **零状态**：外部输入直接引起的响应（相当于系统对当前输入的反应）

类比：一个被压缩的弹簧突然释放。- 弹簧本身的振动 = 零输入响应（初始储能释放）- 如果同时不断推拉弹簧 = 零状态响应（外部驱动）- 总运动 = 两者之和

Q4: 如何判断要用哪种方法求卷积?

A：- 如果两个函数都是简单的解析表达式 $\to$ 直接积分 - 如果是分段函数（矩形脉冲等）$\to$ 图形法最好理解 - 如果已知变换对和性质 $\to$ 用性质法 - 如果函数很复杂 $\to$ 等学了拉普拉斯变换后用变换域法

Q5: 冲激响应 $h(t)$ 和系统的关系是什么?

A：$h(t)$ 是系统的”完整描述”。就像一个人的 DNA 可以完全决定这个人的特征一样，$h(t)$ 完全决定了一个 LTI 系统的行为。知道 $h(t)$ 就能求出对任意输入的响应。

Q6: 因果性和稳定性有什么关系?

A：因果性和稳定性是**独立**的概念：

	因果	非因果
稳定	$e^{-t}u(t)$	$e^{-\|t\|}$

	因果	非因果
不稳定	$u(t)$	$e^{\|t\|}$

一个系统可以因果但不稳定（如积分器），也可以非因果但稳定（如 $e^{-|t|}$）。

Q7: 微分方程的阶数是什么意思?

A：阶数 $=$ 最高微分阶数。一阶系统有 1 个储能元件（如一个电容），二阶系统有 2 个储能元件（如一个电感和一个电容）。阶数越高，系统的动态行为越复杂。

0.4.9 2.8 本章小结

核心公式

概念	公式
系统微分方程	$\sum a_k y^{(k)}(t) = \sum b_k x^{(k)}(t)$
响应分解	$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$
卷积积分	$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
因果性判据	$h(t) = 0, t < 0$
稳定性判据	$\int_{-\infty}^{\infty} \|h(t)\|dt < \infty$

必须掌握的能力

1. 能写出系统的微分方程并确定阶数
2. 能求解零输入响应（特征方程法）
3. 能求解系统的冲激响应
4. 能用图形法计算两个信号的卷积
5. 能用卷积求系统的零状态响应
6. 能利用时域判据判断系统的因果性和稳定性

与后续章节的联系

- 第 3 章（傅里叶变换）：卷积的频域实现、频率响应
- 第 4 章（拉普拉斯变换）：卷积的 s 域实现、系统函数 $H(s)$

0.4.10 2.9 补充例题

例题 10：利用卷积性质求解

已知 $x(t) = \delta(t) + \delta(t-1)$，$h(t) = e^{-t}[u(t) - u(t-2)]$，求 $y(t) = x(t) * h(t)$。

解:

利用分配律:

$$y(t) = \delta(t) * h(t) + \delta(t-1) * h(t) = h(t) + h(t-1)$$

因此:

$$y(t) = e^{-t}[u(t) - u(t-2)] + e^{-(t-1)}[u(t-1) - u(t-3)]$$

这个结果可以分段写出:

- $t < 0$：$y(t) = 0$
- $0 \le t < 1$：$y(t) = e^{-t}$
- $1 \le t < 2$：$y(t) = e^{-t} + e^{-(t-1)}$
- $2 \le t < 3$：$y(t) = e^{-(t-1)}$
- $t \ge 3$：$y(t) = 0$

例题 11：判断系统特征

一个 LTI 系统的冲激响应为 $h(t) = \sin(2t)u(t)$，判断：(1) 是否因果？(2) 是否稳定？

解:

(1) $h(t) = 0$ 当 $t < 0$（因为乘以 $u(t)$），所以是**因果**的。

(2) 检查绝对可积性:

$$\int_0^{\infty} |\sin(2t)| dt$$

$\sin(2t)$ 不衰减，其绝对值在一个周期内的积分为正数，无穷多个周期加起来是无穷大。所以是**不稳定**的。

事实上 $\sin(2t)u(t)$ 对应的是一个无阻尼振荡系统——它会一直振荡下去，永不停止。

0.5 第 3 章：傅里叶变换

0.5.1 本章学习目标

- 理解傅里叶级数的三角形式和指数形式
- 掌握傅里叶级数的收敛条件
- 理解傅里叶变换的定义和物理意义
- 掌握傅里叶变换的重要性质

- 熟记常见信号的傅里叶变换对
- 理解系统的频率响应概念
- 理解采样定理和吉布斯现象

0.5.2 3.1 从时域到频域：换个角度看问题

3.1.1 为什么要变换?

在前两章中，我们一直在”时域”分析信号——看信号如何随时间变化。但有些问题时域中很难分析，比如：

- 信号中包含哪些频率成分?
- 如何设计滤波器去除噪声?
- 系统对不同频率的输入有何不同反应?

频域分析就像用”频率”的视角看世界，就像用棱镜将白光分解为七色光一样。

通俗理解：- **时域**：看一个音乐信号随时间变化的波形（振幅-时间图）- **频域**：看这个音乐信号中包含哪些音符（振幅-频率图）

3.1.2 傅里叶的核心思想

任何周期信号都可以表示为不同频率的正弦波（或复指数）的叠加。

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

通俗理解：就像白光可以分解为七色光，任何信号都可以分解为不同频率的正弦波。这些正弦波的幅度和相位由信号的”频谱”决定。

0.5.3 3.2 周期信号的傅里叶级数

3.2.1 三角形式的傅里叶级数

对于一个周期为 T 的周期信号 $x(t)$（基本角频率 $\omega_0 = 2\pi/T$），可以表示为：

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)}$$

其中：

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt \quad \text{（直流分量）}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

$\int_T$ 表示在一个周期上积分（可以从 0 到 T，或 $-T/2$ 到 $T/2$）。

通俗理解：- a_0：信号的直流（平均）分量 - $a_n\cos(n\omega_0 t)$：余弦分量（偶函数成分）- $b_n\sin(n\omega_0 t)$：正弦分量（奇函数成分）

另一种等价表示

$$\boxed{x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(n\omega_0 t + \varphi_n)}$$

其中：

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

c_n 是第 n 次谐波的**幅度**，φ_n 是**相位**。

例题 1：方波的傅里叶级数　求周期为 T、幅度为 1、占空比 50% 的方波的傅里叶级数。

方波在一个周期内定义为：

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -T/4 < t < T/4 \\ 0, & T/4 < |t| < T/2 \end{cases}$$

解：

$\omega_0 = 2\pi/T$

计算 a_0：

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} 1 \cdot dt = \frac{1}{T}\cdot\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

计算 a_n：

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4}\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\cdot\left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_{-T/4}^{T/4}$$

$$= \frac{2}{T}\cdot\frac{2\sin(n\omega_0 T/4)}{n\omega_0} = \frac{4\sin(n\pi/2)}{n\cdot 2\pi/T\cdot T} = \frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi}$$

计算 b_n：由于 $x(t)$ 是偶函数（$x(t) = x(-t)$），所有 $b_n = 0$。

所以：

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi} \cos(n\omega_0 t)$$

展开（注意 $\sin(n\pi/2)$ 的取值）：

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega_0 t) - \cdots$$

重要观察：- 只有奇数次谐波（$1, 3, 5, 7, ...$）- 幅度随频率增加而减小（$1/n$ 规律）- 谐波次数越高，贡献越小

3.2.2 指数形式的傅里叶级数

利用欧拉公式，三角形式可以转换为更简洁的指数形式：

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}}$$

其中系数为：

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}$$

与三角形式系数的关系：

$$c_0 = a_0$$

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad n > 0$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = c_n^*, \quad n > 0$$

通俗理解：指数形式是将正频率和负频率统一处理。物理上负频率没有实际意义，但数学上可以简化计算。

例题 2：方波的指数傅里叶级数 同上例的方波，求指数形式的傅里叶级数。

解：

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \cdot \left[\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right]_{-T/4}^{T/4}$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \frac{e^{-jn\omega_0 T/4} - e^{jn\omega_0 T/4}}{-jn\omega_0} = \frac{2\sin(n\omega_0 T/4)}{Tn\omega_0}$$

代入 $\omega_0 = 2\pi/T$：

$$c_n = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}$$

所以：

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} e^{jn\omega_0 t}$$

3.2.3 频谱的概念

幅度频谱：$|c_n|$ 关于频率 $n\omega_0$ 的图形 **相位频谱**：$\angle c_n$ 关于频率 $n\omega_0$ 的图形

通俗理解：频谱就像信号的" 食谱"——它告诉你信号由哪些频率的" 原料" 组成，每种原料放了多少。

对于例题中的方波，其幅度频谱如图所示（离散谱线）：- 直流分量：$1/2$ - 基波（ω_0）：$1/\pi$ - 3 次谐波：$1/(3\pi)$ - 5 次谐波：$1/(5\pi)$

3.2.4 傅里叶级数的收敛条件（狄利赫里条件）

一个周期信号可以展开为傅里叶级数的充分条件是满足**狄利赫里条件**：

1. **绝对可积**：在一个周期内 $\int_T |x(t)|dt < \infty$
2. **有限个极值点**：在一个周期内只有有限个最大值和最小值
3. **有限个跳变点**：在一个周期内只有有限个不连续点

通俗理解：大多数实际信号都满足这些条件。即使矩形波也满足（虽然它在跳变点处不连续）。

0.5.4 3.3 非周期信号的傅里叶变换

3.3.1 从傅里叶级数到傅里叶变换

当周期 $T \to \infty$ 时，周期信号变为非周期信号。此时：- 谱线间隔 $\omega_0 = 2\pi/T \to 0$ - 离散谱变为连续谱 - c_n 变为 $X(j\omega)$

傅里叶变换定义：

$$\boxed{X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt}$$

傅里叶反变换：

$$\boxed{x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

通俗理解：- **正变换**：把时域信号”翻译”成频域表示（分析信号包含哪些频率）- **反变换**：把频域表示”翻译”回时域信号（从频率合成信号）

3.3.2 傅里叶变换的物理意义

$X(j\omega)$ 是信号 $x(t)$ 在频率 ω 处的”密度”——表示信号中包含频率 ω 的成分有多少。

$$|X(j\omega)| \quad \text{幅度谱密度}$$

$$\angle X(j\omega) \quad \text{相位谱}$$

0.5.5 3.4 常见信号的傅里叶变换对

3.4.1 冲激信号

$$\boxed{\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1}$$

理解：冲激信号包含所有频率成分，且各频率的幅度相等。这就是为什么用锤子敲一下会产生”所有频率”的声音。

3.4.2 直流信号

$$\boxed{\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)}$$

理解：直流信号只包含零频率成分。

3.4.3 单边指数信号

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

$$\boxed{X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}}$$

幅度谱：

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

相位谱：

$$\angle X(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

3.4.4 单位阶跃信号

$$\boxed{\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$$

注意：阶跃信号包含直流分量（$\pi\delta(\omega)$）和交流分量（$1/j\omega$）。

3.4.5 矩形脉冲

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

$$\boxed{X(j\omega) = \frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega} = T \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)}$$

其中 $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$（有些教材定义为 $\frac{\sin x}{x}$）。

3.4.6 正弦信号

$$\boxed{\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]}$$

理解：纯正弦信号在频域中只对应一根（一对）谱线——这正是" 单色波" 的含义。

3.4.7 高斯信号

$$x(t) = e^{-at^2}$$

$$\boxed{X(j\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/(4a)}}$$

有趣性质：高斯信号的傅里叶变换仍然是高斯函数。

0.5.6 3.5 傅里叶变换的重要性质

3.5.1 线性性质

$$\boxed{\mathcal{F}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)}$$

验证：直接代入定义，积分是线性运算。

3.5.2 时移性质

$$\boxed{\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = X(j\omega)e^{-j\omega t_0}}$$

通俗理解：信号在时域中延迟 t_0，相当于在频域中乘以 $e^{-j\omega t_0}$（相位旋转）。
验证：

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j\omega t}dt$$

令 $\tau = t - t_0$：

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)}d\tau = e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

3.5.3 频移性质

$$\boxed{\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}x(t)\} = X(j(\omega - \omega_0))}$$

通俗理解：信号在时域中乘以 $e^{j\omega_0 t}$，相当于在频域中向右平移 ω_0。这就是**调制**的基础！

3.5.4 尺度变换性质

$$\boxed{\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)}$$

通俗理解：- $a > 1$（时域压缩）：频域展宽，幅度减小 - $0 < a < 1$（时域展宽）：频域压缩，幅度增大

物理意义：信号在时域中变化越快，频域中占据的带宽越宽。这就是”快变信号 = 宽频带”的数学解释。

3.5.5 对偶性质

如果 $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$，则：

$$\boxed{\mathcal{F}\{X(jt)\} = 2\pi x(-\omega)}$$

通俗理解：傅里叶变换具有对称性——时域和频域的角色可以互换。

应用：已知一个变换对，通过对偶可以得到另一个变换对。

例题 3：利用对偶性质 已知 $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$，利用对偶性质求 $\mathcal{F}\{1\}$。

解：

由 $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$，如果 $x(t) = \delta(t)$，则 $X(j\omega) = 1$。

由对偶性质：$\mathcal{F}\{X(jt)\} = 2\pi x(-\omega)$

令 $X(jt) = 1$（即常数 1），则：

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

正确

3.5.6 卷积性质（最重要！）

$$\boxed{\mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = X(j\omega)\cdot H(j\omega)}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{x(t)\cdot h(t)\} = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * H(j\omega)}$$

含义：时域卷积 = 频域相乘，时域相乘 = 频域卷积。

通俗理解：- 系统在时域中对信号的”混合”（卷积），在频域中只是简单的”相乘”- 这就是为什么频域分析如此重要——它将复杂的卷积运算变为简单的乘法！

例题 4：利用卷积性质 已知系统冲激响应 $h(t) = e^{-t}u(t)$，输入 $x(t) = e^{-2t}u(t)$，求输出 $y(t)$。

解：

$$X(j\omega) = \frac{1}{2+j\omega}, \quad H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

由卷积性质：

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)(1+j\omega)}$$

部分分式展开：

$$Y(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{2+j\omega}$$

反变换：

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

这比分时域卷积计算简单得多！

3.5.7 调制性质

$$\boxed{\mathcal{F}\{x(t)\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}[X(j(\omega-\omega_0)) + X(j(\omega+\omega_0))]}$$

通俗理解：调制就是将信号的频谱搬移到 $\pm\omega_0$ 处。这就是 AM 广播的原理！

3.5.8 时域微分性质

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n X(j\omega)}$$

通俗理解：时域微分对应频域乘以 $j\omega$——微分强调高频成分。

3.5.9 时域积分性质

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)}$$

通俗理解：时域积分对应频域除以 $j\omega$——积分抑制高频成分。

3.5.10 Parseval 定理

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega}$$

通俗理解：信号在时域的总能量等于在频域的总能量——傅里叶变换不改变信号的能量。

0.5.7 3.6 傅里叶变换性质总结表

性质	时域	频域
线性	$ax_1 + bx_2$	$aX_1 + bX_2$
时移	$x(t-t_0)$	$X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
频移	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega-\omega_0))$
尺度	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(j\omega/a)$
对偶	$X(jt)$	$2\pi x(-\omega)$
卷积	$x(t)*h(t)$	$X(j\omega)H(j\omega)$
调制	$x(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)]$
微分	$\frac{d^n x}{dt^n}$	$(j\omega)^n X(j\omega)$
积分	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{X(j\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$
Parseval	$\int\lvert x\rvert^2dt$	$\frac{1}{2\pi}\int\lvert X\rvert^2d\omega$

0.5.8 3.7 LTI 系统的频率响应

3.7.1 频率响应的定义

对于 LTI 系统，**频率响应**定义为：

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}}$$

其中 $X(j\omega)$ 和 $Y(j\omega)$ 分别是输入和输出的傅里叶变换。

与冲激响应的关系：

$$\boxed{H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}}$$

通俗理解：频率响应告诉系统对不同频率的输入如何处理——放大还是衰减、相位超前还是滞后。

3.7.2 频率响应的物理意义

如果输入是正弦信号 $x(t) = \cos(\omega_0 t)$，则输出为：

$$y(t) = |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0))$$

意思：- 输出频率不变（仍是 ω_0） - 幅度乘以 $|H(j\omega_0)|$ - 相位增加 $\angle H(j\omega_0)$

这就是 LTI 系统的特征函数性质——正弦波输入 LTI 系统，输出仍然是同频率的正弦波，只是幅度和相位变了。

3.7.3 系统的滤波特性

根据频率响应的形状，系统可以分为：

类型	特点	频率响应
低通	低频通过，高频衰减	
高通	高频通过，低频衰减	
带通	特定频带通过	
带阻	特定频带衰减	

例题 5：RC 低通滤波器 RC 电路的频率响应为：

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

幅度响应：$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$

- 当 $\omega = 0$（直流）：$|H(0)| = 1$，直流完全通过
- 当 $\omega = 1/(RC)$（截止频率）：$|H| = 1/\sqrt{2}$，功率减半（-3dB 点）
- 当 $\omega \to \infty$：$|H| \to 0$，高频被抑制

0.5.9 3.8 采样定理

3.8.1 时域采样

采样是将连续信号转换为离散信号的过程：

$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

其中 T_s 是采样周期，$f_s = 1/T_s$ 是采样频率。

3.8.2 采样定理（Nyquist-Shannon 采样定理）

定理：如果一个信号的最高频率为 ω_M（或 f_M），那么要能够从采样信号中完全恢复原信号，采样频率必须满足：

$$\boxed{f_s \geq 2f_M} \quad \text{或} \quad \boxed{\omega_s \geq 2\omega_M}$$

其中 $2f_M$ 称为 **Nyquist 速率**，$f_s/2$ 称为 **Nyquist 频率**（折叠频率）。

通俗理解：采样频率至少要等于信号最高频率的 2 倍，才能保证不丢失信息。就像拍快速运动的物体，快门速度要足够快才能捕捉到细节。

3.8.3 混叠（Aliasing）

如果采样频率低于 Nyquist 速率，高频成分会" 混叠" 到低频区域，产生失真。

通俗理解：电影中车轮看起来反转的现象（wagon-wheel effect ）就是混叠——车轮的实际转速超过了采样帧率的一半。

3.8.4 信号重建

理想情况下，通过低通滤波器可以从采样信号恢复原信号：

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

0.5.10 3.9 吉布斯现象

3.9.1 什么是吉布斯现象?

当用傅里叶级数逼近具有跳变（不连续点）的信号时，在跳变点附近会出现**过冲**（overshoot），而且无论取多少项，过冲的幅度都不会消失（约为跳变幅度的 9%）。

通俗理解：即使用很多正弦波去逼近一个方波，在跳变点处总是会有" 振铃" 现象——就像方波的角总是" 圆" 不了。

3.9.2 吉布斯现象的数学解释

考虑用前 N 项傅里叶级数逼近方波：

$$x_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi} \cos(n\omega_0 t)$$

随着 N 增大，近似效果在远离跳变点处越来越好，但在跳变点附近，过冲幅度趋近于跳变幅度的约 1.089 倍（即 9% 的过冲）。

3.9.3 实际意义

- 在设计滤波器时，吉布斯现象导致通带和阻带之间的过渡带出现”振铃”
- 这是为什么实际滤波器需要设计**过渡带**，而不是理想的”一刀切”形状

0.5.11 3.10 零基础学生常见困惑

Q1：负频率是什么意思？物理上存在吗？

A：负频率是数学上的概念，没有直接的物理意义。它来自于复指数表示 $e^{j\omega t}$ 和 $e^{-j\omega t}$，这两者结合才能产生实的正弦信号。可以理解为：负频率只是为了数学上的对称性。

Q2：频谱是离散的还是连续的？

A：- **周期信号** $\rightarrow$ 离散频谱（线谱），只在 $n\omega_0$ 处有值 - **非周期信号** $\rightarrow$ 连续频谱，在所有频率上都有值

Q3：傅里叶变换和傅里叶级数的关系？

A：傅里叶级数是傅里叶变换的特例——当信号是周期信号时。傅里叶级数的系数 c_n 和傅里叶变换 $X(j\omega)$ 的关系是：

$$c_n = \frac{1}{T} X(jn\omega_0)$$

Q4：为什么要学傅里叶变换？有什么实际应用？

A：- **通信系统**：调制解调、频分复用 - **图像处理**：JPEG 压缩（基于 DCT，与傅里叶变换相关）- **音频处理**：MP3 编码、降噪 - **医学**：MRI 成像、心电图分析 - **任何涉及”频率”的领域**

Q5：信号在时域和频域能否同时有限？

A：**不能**（不确定性原理）。如果信号在时域是严格有限的（只在有限时间内非零），在频域一定是无限宽的。反之亦然。这就是海森堡不确定性原理在信号处理中的体现。

Q6：采样定理在实际中怎么用？

A：实际采样时通常取 $f_s > 2f_M$（而不是等于），预留一定的余量。例如：- 语音信号最高频率约 4kHz，电话系统用 8kHz 采样 - 音频 CD 最高频率约 20kHz，用 44.1kHz 采样 - 采样前通常需要**抗混叠滤波器**（低通滤波器）滤除高于 $f_s/2$ 的频率成分

0.5.12 3.11 本章小结

核心公式

概念	公式
傅里叶级数（指数）	$x(t) = \sum c_n e^{jn\omega_0 t}$
傅里叶级数系数	$c_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$
傅里叶变换	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$
傅里叶反变换	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$
时域卷积 $\rightarrow$ 频域相乘	$\mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = X(j\omega)H(j\omega)$
频率响应	$H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = Y(j\omega)/X(j\omega)$
采样定理	$f_s \geq 2f_M$

必须掌握的能力

1. 能计算周期信号的傅里叶级数系数
2. 能计算简单信号的傅里叶变换
3. 能灵活运用傅里叶变换的性质
4. 能用频率响应分析系统的滤波特性
5. 能用卷积性质简化计算（时域卷积 $\rightarrow$ 频域相乘）
6. 理解采样定理的基本内容

与后续章节的联系

- 第 4 章（拉普拉斯变换）：傅里叶变换是拉普拉斯变换在 $s = j\omega$ 时的特例
- 第 6 章（Z 变换）：Z 变换是离散域的” 傅里叶变换”

0.5.13 3.12 综合例题

例题 6：利用性质求傅里叶变换

求信号 $x(t) = e^{-a|t|}$ 的傅里叶变换。

解：

将 $e^{-a|t|}$ 分解为：

$$e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

已知 $\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a+j\omega}$

利用对偶性质或直接计算：

$$\mathcal{F}\{e^{at}u(-t)\} = \frac{1}{a - j\omega}$$

所以：

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

验证：这是一个实偶函数，其傅里叶变换也是实偶函数。

例题 7：系统分析

一个 LTI 系统的频率响应为 $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$，输入为 $x(t) = \cos(2t)$，求输出。

解：

在 $\omega = 2$ 处：

$$H(j2) = \frac{1}{1 + j2} = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-j\arctan(2)}$$

所以：

$$y(t) = |H(j2)|\cos(2t + \angle H(j2)) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos\left(2t - \arctan(2)\right)$$

例题 8：理想低通滤波器

理想低通滤波器的频率响应为：

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

求冲激响应 $h(t)$。

解：

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{jt} = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi} \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)$$

注意：$h(t)$ 在 $t < 0$ 时非零，所以理想低通滤波器是**非因果**的——物理上不可实现。实际滤波器只能近似实现。

0.6 第 4 章：拉普拉斯变换

0.6.1 本章学习目标

- 理解拉普拉斯变换的定义和物理意义
- 掌握收敛域 (ROC) 的概念和分析方法
- 熟记拉普拉斯变换的重要性质和常用变换对
- 掌握拉普拉斯反变换（部分分式展开法）
- 能用拉普拉斯变换求解微分方程
- 理解系统函数 $H(s)$ 及其与冲激响应的关系
- 掌握零极点分析和系统稳定性判据
- 能画出系统的方框图实现

为什么拉普拉斯变换最重要? 因为它将微分方程转化为代数方程，将卷积运算转化为乘法运算，将时域分析搬到复频域（s 域）中——极大地简化了问题的分析和求解。考试中约 40% 的题目与此相关。

0.6.2 4.1 拉普拉斯变换的定义

4.1.1 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

傅里叶变换 $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$ 只能处理绝对可积的信号。

问题：很多重要信号（如 $e^{at}u(t), a>0$、$u(t)$）不满足绝对可积条件。

解决方案：给信号乘以一个衰减因子 $e^{-\sigma t}$（σ 为实数），使其变" 收敛"：

$$\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

令 $s=\sigma+j\omega$（复频率），得到**双边拉普拉斯变换**：

$$\boxed{X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt}$$

通俗理解：拉普拉斯变换是傅里叶变换的" 升级版"——引入 $s=\sigma+j\omega$，将频域分析扩展到复频域。原本不发散的信号乘以 $e^{-\sigma t}$ 后变得可以分析。

4.1.2 双边 vs 单边拉普拉斯变换

双边拉普拉斯变换（Bilateral LT）：

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$$

单边拉普拉斯变换（Unilateral LT）：

$$\boxed{X(s)=\int_{0^-}^{\infty}x(t)e^{-st}dt}$$

本课程主要使用单边拉普拉斯变换，原因：- 实际系统通常从 $t = 0$ 开始分析 - 可以自动包含初始条件 - 适合求解初值问题

拉普拉斯反变换：

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds}$$

这是一个复变函数的**围线积分**，本课程中不直接使用这个公式——我们主要通过**部分分式展开**和查表求反变换。

0.6.3 4.2 收敛域 (ROC)

4.2.1 ROC 的定义

收敛域（Region of Convergence, ROC）是使拉普拉斯变换积分收敛的 s 的取值范围。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-st}| dt < \infty$$

即：$X(s)$ 存在且解析的 s 值集合。

4.2.2 ROC 的图形表示

ROC 在 s 平面上表示（s 平面：横轴为 $\Re\{s\} = \sigma$，纵轴为 $\Im\{s\} = j\omega$）：

```
    Im
    ↑
        ROC用阴影区域表示
      → Re
```

4.2.3 ROC 的性质

1. ROC 是平行于 $j\omega$ 轴的带状区域（因为收敛只取决于 $\sigma = \Re\{s\}$）
2. 对于有理拉普拉斯变换，ROC 内**不含任何极点**
3. ROC 的边界由极点位置决定
4. 如果信号是右边信号（只在 $t > T$ 时有值），ROC 位于最右边极点的右侧
5. 如果信号是左边信号（只在 $t < T$ 时有值），ROC 位于最左边极点的左侧
6. 如果信号是双边信号，ROC 是带状区域
7. 如果信号是有限长信号，ROC 是整个 s 平面（可能不包括原点或无穷远点）

4.2.4 常见信号的 ROC

信号	拉普拉斯变换	ROC
$\delta(t)$	1	全部 s
$u(t)$	$1/s$	$\Re\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$1/s$	$\Re\{s\} < 0$
$e^{-at}u(t)$	$1/(s+a)$	$\Re\{s\} > -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$1/(s+a)$	$\Re\{s\} < -a$
$t^n u(t)$	$n!/s^{n+1}$	$\Re\{s\} > 0$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$s/(s^2+\omega_0^2)$	$\Re\{s\} > 0$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\omega_0/(s^2+\omega_0^2)$	$\Re\{s\} > 0$

重要：相同的 $X(s)$ 表达式，不同的 ROC，对应不同的信号！比如 $1/s$ 的 ROC 是 $\Re\{s\} > 0$ 时对应 $u(t)$，ROC 是 $\Re\{s\} < 0$ 时对应 $-u(-t)$。

通俗理解：ROC 就像是一个" 使用说明书"——同样的拉普拉斯变换表达式，没有 ROC 就无法确定它对应哪个信号。

例题 1：确定 ROC 求信号 $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}u(t)$ 的拉普拉斯变换和 ROC。

解：

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1$$

因为第一个分式的 ROC 是 $\Re\{s\} > -2$，第二个分式的 ROC 是 $\Re\{s\} > -1$，取交集得 $\Re\{s\} > -1$。

0.6.4 4.3 拉普拉斯变换的性质

4.3.1 线性性质

$$\boxed{\mathcal{L}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aX_1(s) + bX_2(s)}$$

ROC：两个信号 ROC 的交集（可能扩大）。

4.3.2 时移性质

$$\boxed{\mathcal{L}\{x(t-t_0)u(t-t_0)\} = e^{-st_0}X(s), \quad t_0 \geq 0}$$

通俗理解：信号延迟 t_0，变换域乘以 e^{-st_0}。

验证:

$$\mathcal{L}\{x(t-t_0)u(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} x(t-t_0)e^{-st}dt$$

令 $\tau = t - t_0$:

$$= \int_{-t_0}^{\infty} x(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}d\tau = e^{-st_0}\int_0^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-st_0}X(s)$$

4.3.3 s 域平移

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{s_0 t}x(t)\} = X(s-s_0)}$$

ROC:ROC + $\Re\{s_0\}$

通俗理解:时域乘以 $e^{s_0 t}$,变换域平移 s_0。

4.3.4 尺度变换

$$\boxed{\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0}$$

ROC:$\Re\{s\}$ 也按比例缩放。

4.3.5 时域微分性质(非常重要)

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^-)}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)}$$

一般形式:

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{d^nx(t)}{dt^n}\right\} = s^nX(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k}x^{(k)}(0^-)}$$

通俗理解:微分方程变成代数方程!这就是拉普拉斯变换最重要的应用。时域微分对应 s 域乘以 s 并减去初始条件。

4.3.6 时域积分性质

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s}}$$

4.3.7 初值定理

如果 $x(t)$ 及其导数存在拉普拉斯变换,且极限存在,则:

$$\boxed{x(0^+) = \lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to\infty} sX(s)}$$

通俗理解：通过 $X(s)$ 在无穷远处的行为可以知道 $x(t)$ 在原点附近的行为。

4.3.8 终值定理

如果 $x(t)$ 的极限存在（即系统稳定），则：

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)}$$

使用条件：$sX(s)$ 的极点都在左半平面（即系统稳定）。

通俗理解：通过 $X(s)$ 在 $s=0$ 附近的行为可以知道 $x(t)$ 的稳态值。

例题 2：初值和终值定理　已知 $X(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}$，求 $x(0^+)$ 和 $x(\infty)$。

解：

初值：

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(s+2)}{s(s+1)(s+3)} = \lim_{s\to\infty} \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = 0$$

终值（检查条件：极点 $s=0,-1,-3$，除了 $s=0$ 外都在左半平面，但 $s=0$ 处的极点意味着终值存在？需检查）：

$sX(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$ 的极点在 $s=-1, s=-3$，都在左半平面，所以终值定理适用。

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{2}{3}$$

4.3.9 卷积性质

$$\boxed{\mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} = X(s)H(s)}$$

这是拉普拉斯变换最重要的性质之一！时域的卷积运算变为 s 域的乘法运算。

例题 3：利用卷积性质　用卷积性质求 $y(t) = e^{-t}u(t) * e^{-2t}u(t)$。

解：

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

反变换：

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

0.6.5 4.4 常用信号的拉普拉斯变换对

4.4.1 基本信号

时域 $x(t)$	s 域 $X(s)$	ROC
$\delta(t)$	1	全部 s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\Re\{s\} > 0$

4.4.2 指数信号

时域 $x(t)$	s 域 $X(s)$	ROC
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} > -a$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\Re\{s\} > -a$
$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\Re\{s\} > -a$

4.4.3 正弦/余弦信号

时域 $x(t)$	s 域 $X(s)$	ROC
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\Re\{s\} > -a$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\Re\{s\} > -a$

0.6.6 4.5 拉普拉斯反变换：部分分式展开法

4.5.1 为什么用部分分式?

拉普拉斯变换通常是有理函数形式：

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots + b_0}{s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_0}$$

部分分式展开将复杂有理函数分解为简单项的和，每个简单项对应一个已知的变换对。

4.5.2 真分式情况（N > M）

情况 1：所有极点都是单极点（单实根）

$$X(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_N)}$$

展开为：

$$X(s) = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{k_N}{s-p_N}$$

其中系数：

$$\boxed{k_i = (s-p_i)X(s)\Big|_{s=p_i}}$$

例题 4：单极点展开　求 $X(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ 的反变换。

解：

展开：

$$X(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$$

$$k_1 = (s+1)X(s)\Big|_{s=-1} = \frac{s+3}{s+2}\Big|_{s=-1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$k_2 = (s+2)X(s)\Big|_{s=-2} = \frac{s+3}{s+1}\Big|_{s=-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

所以：

$$X(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

反变换（假设因果信号，ROC $\Re\{s\} > -1$）：

$$\boxed{x(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)}$$

情况 2：含共轭复极点　如果 $X(s)$ 分母有 $s^2+bs+c=0$ 的共轭复根 $\alpha \pm j\beta$，可以保留二次项：

$$X(s) = \frac{As+B}{(s+\alpha)^2+\beta^2} + \text{其他项}$$

对应时域：

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\right\}=e^{-\alpha t}\cos(\beta t)u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\right\}=e^{-\alpha t}\sin(\beta t)u(t)$$

例题 5：共轭复极点　求 $X(s)=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$ 的反变换。

解:

直接识别为 $\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2}$，对应 $e^{-t}\cos(2t)u(t)$。

所以:

$$\boxed{x(t)=e^{-t}\cos(2t)u(t)}$$

情况 3：多重极点　如果有 r 重极点 p:

$$X(s)=\frac{N(s)}{(s-p)^r D_1(s)}$$

展开为:

$$X(s)=\frac{k_{11}}{(s-p)^r}+\frac{k_{12}}{(s-p)^{r-1}}+\cdots+\frac{k_{1r}}{s-p}+\text{其他极点项}$$

系数公式:

$$k_{1j}=\frac{1}{(j-1)!}\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[(s-p)^r X(s)\right]\Big|_{s=p}$$

对应时域:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-p)^r}\right\}=\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}e^{pt}u(t)$$

例题 6：多重极点　求 $X(s)=\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$ 的反变换。

解:

展开:

$$X(s)=\frac{k_{11}}{(s+1)^2}+\frac{k_{12}}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}$$

$$k_{11}=(s+1)^2X(s)\Big|_{s=-1}=\frac{1}{s+2}\Big|_{s=-1}=1$$

$$k_{12} = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^2 X(s)\right]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+2}\right]\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{(s+2)^2}\Big|_{s=-1} = -1$$

$$k_2 = (s+2)X(s)\Big|_{s=-2} = \frac{1}{(s+1)^2}\Big|_{s=-2} = 1$$

所以:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

反变换:

$$\boxed{x(t) = (te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t})u(t)}$$

4.5.3 非真分式情况（M >= N）

当分子阶数 $>=$ 分母阶数时，先用多项式除法化简:

$$X(s) = \underbrace{c_{M-N}s^{M-N} + \cdots + c_1 s + c_0}_{\text{多项式部分}} + \underbrace{\frac{N_1(s)}{D(s)}}_{\text{真分式部分}}$$

多项式部分对应 $\delta(t)$ 及其导数。

例题 7：非真分式 求 $X(s) = \frac{s^2+2s+3}{s+1}$ 的反变换。

解:

做多项式除法:

$$\frac{s^2+2s+3}{s+1} = (s+1) + \frac{2}{s+1}$$

注意：$s+1$ 对应的时域是 $\frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t)$。

所以:

$$x(t) = \delta'(t) + \delta(t) + 2e^{-t}u(t)$$

0.6.7 4.6 用拉普拉斯变换求解微分方程

4.6.1 基本步骤

这是拉普拉斯变换最核心的应用！步骤如下:

1. 对微分方程两边取拉普拉斯变换（利用微分性质包含初始条件）

2. 解代数方程得到 $Y(s)$
3. 对 $Y(s)$ 进行部分分式展开
4. 取拉普拉斯反变换得到 $y(t)$

例题 8：用拉普拉斯变换求解微分方程 求解微分方程：$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2x'(t)+x(t)$，初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$，输入 $x(t)=e^{-t}u(t)$。

解：

第一步：两边取拉普拉斯变换

$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+3[sY(s)-y(0)]+2Y(s)=2[sX(s)-x(0)]+X(s)$$

代入初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$：

$$(s^2+3s+2)Y(s)-s-3=(2s+1)X(s)-2x(0)$$

第二步：代入 $X(s)$

$$x(t)=e^{-t}u(t)\Rightarrow X(s)=\frac{1}{s+1}$$

$x(0)=1$（从 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 可知）

$$(s^2+3s+2)Y(s)-s-3=\frac{2s+1}{s+1}-2$$

第三步：解出 $Y(s)$

$$(s^2+3s+2)Y(s)=\frac{2s+1}{s+1}-2+s+3=\frac{2s+1}{s+1}+s+1$$

$$=\frac{2s+1+(s+1)^2}{s+1}=\frac{s^2+4s+2}{s+1}$$

所以：

$$Y(s)=\frac{s^2+4s+2}{(s+1)(s^2+3s+2)}=\frac{s^2+4s+2}{(s+1)^2(s+2)}$$

第四步：部分分式展开

$$Y(s)=\frac{k_{11}}{(s+1)^2}+\frac{k_{12}}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}$$

$$k_{11}=(s+1)^2Y(s)\Big|_{s=-1}=\frac{s^2+4s+2}{s+2}\Big|_{s=-1}=\frac{1-4+2}{1}=-1$$

$$k_{12} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+4s+2}{s+2}\right]\Big|_{s=-1} = \frac{(2s+4)(s+2)-(s^2+4s+2)}{(s+2)^2}\Big|_{s=-1}$$

$$= \frac{(2)(1)-(-1)}{1} = 3 \quad \text{（详细计算）}$$

让我们仔细算：

$$f(s) = \frac{s^2+4s+2}{s+2}$$

$$f'(s) = \frac{(2s+4)(s+2)-(s^2+4s+2)}{(s+2)^2} = \frac{(2s^2+8s+8)-(s^2+4s+2)}{(s+2)^2} = \frac{s^2+4s+6}{(s+2)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{1-4+6}{1} = 3$$

所以 $k_{12} = 3$。

$$k_2 = (s+2)Y(s)\Big|_{s=-2} = \frac{s^2+4s+2}{(s+1)^2}\Big|_{s=-2} = \frac{4-8+2}{1} = -2$$

所以：

$$Y(s) = -\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

第五步：反变换

$$\boxed{y(t) = (-te^{-t} + 3e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)}$$

例题 8：对比时域法 回顾第 2 章中我们用微分方程求解类似问题（例题 6），步骤繁琐且容易出错。而用拉普拉斯变换，整个过程是**代数运算**——这就是拉普拉斯变换的强大之处！

0.6.8 4.7 系统函数 $H(s)$

4.7.1 系统函数的定义

对于 LTI 系统，**系统函数**（也称**传递函数**）定义为：

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}}$$

当初始条件为零时。

4.7.2 系统函数与冲激响应的关系

$$\boxed{H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}}$$

$$\boxed{h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}}$$

4.7.3 从微分方程求系统函数

给定微分方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

在零初始条件下取拉普拉斯变换：

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right) Y(s) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k s^k\right) X(s)$$

所以：

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}}$$

例题 9：求系统函数 系统微分方程为 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 2x(t)$，求 $H(s)$。

解：

零初始条件下取拉普拉斯变换：

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 2)X(s)$$

所以：

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+2}{s^2+3s+2} = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1}$$

冲激响应：

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

0.6.9 4.8 零极点分析与系统稳定性

4.8.1 零点和极点的定义

系统函数通常可以写为有理分式形式：

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(s-p_i)}$$

零点：使 $H(s) = 0$ 的 s 值，即 $N(s) = 0$ 的根 z_i。
极点：使 $H(s) \to \infty$ 的 s 值，即 $D(s) = 0$ 的根 p_i。

4.8.2 零极点图

在 s 平面上用"o" 表示零点，用"x" 表示极点：

```
      Im
      ↑
   x     o
  -2    -1
         → Re
```

4.8.3 从零极点判断系统稳定性

因果 LTI 系统稳定的充要条件：$H(s)$ 的所有极点都位于 s 平面的**左半平面**（即所有极点的实部为负数）。

$$\boxed{\Re\{p_i\} < 0, \quad \forall i \iff \text{系统稳定}}$$

通俗理解：- 左半平面极点 → 指数衰减 → 系统稳定 - 右半平面极点 → 指数增长 → 系统不稳定 - 虚轴上极点 → 等幅振荡 → 临界稳定（边界稳定）

例题 10：稳定性判断 判断以下系统函数的稳定性：
(1) $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$
(2) $H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$
(3) $H(s) = \frac{1}{s^2+\omega_0^2}$
解：
(1) 极点：$s = -1$, $s = -3$，都在左半平面 → **稳定**
(2) 极点：$s = 1$（右半平面），$s = -2$（左半平面）→ **不稳定**
(3) 极点：$s = \pm j\omega_0$，在虚轴上 → **临界稳定**

4.8.4 极点位置与冲激响应的对应关系

极点位置	时间波形	稳定性
负实轴 $\sigma < 0$	$e^{\sigma t}$ 指数衰减	稳定

极点位置	时间波形	稳定性
正实轴 $\sigma > 0$	$e^{\sigma t}$ 指数增长	不稳定
共轭左半平面 $\sigma \pm j\omega$	$e^{\sigma t}\sin(\omega t+\phi)$ 衰减振荡	稳定
共轭右半平面 $\sigma \pm j\omega$	$e^{\sigma t}\sin(\omega t+\phi)$ 增长振荡	不稳定
虚轴 $\pm j\omega$	$\sin(\omega t+\phi)$ 等幅振荡	临界稳定
$s=0$	阶跃（常数）	临界稳定
重根在虚轴	$t\sin(\omega t)$ 增长振荡	不稳定

4.8.5 从零极点估计频率响应

对于稳定系统，频率响应 $H(j\omega)$ 可以通过零极点图估计：

$$|H(j\omega)| = K\frac{\prod_{i=1}^{M}|j\omega - z_i|}{\prod_{i=1}^{N}|j\omega - p_i|}$$

$$\angle H(j\omega) = \sum_{i=1}^{M}\angle(j\omega - z_i) - \sum_{i=1}^{N}\angle(j\omega - p_i)$$

几何意义：从每个零/极点到 $j\omega$ 轴上的点的向量长度决定了幅度，角度决定了相位。

0.6.10 4.9 系统方框图实现

4.9.1 基本运算单元

方框图用三种基本单元实现系统：

单元	符号	时域	s 域
加法器		$x_1 + x_2$	$X_1 + X_2$
数乘器		ax	aX
积分器		$\int x dt$	X/s

注意：在连续系统中，基本存储单元是**积分器**（不是微分器），因为积分器对噪声不敏感。

4.9.2 直接型实现

直接 I 型：直接根据微分方程实现

对于 $H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$，可以直接画出：

```
x(t) →[b_2] →[1/s] →[1/s] → y(t)
          ↑        ↑        ↑
         [b_1]   [-a_1]   [b_0]
          |        |        |
                   →

          ↑
         [-a_0]
```

直接 II 型（最常用）：将系统分解为两部分

系统函数 $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ 分为：1. 分母部分 $1/D(s)$ —— 反馈环路 2. 分子部分 $N(s)$ —— 前馈通路

实现方法：先实现分母（一个虚拟信号），再通过分子生成输出。

例题 11：直接 II 型实现　系统 $H(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2}$，画出直接 II 型方框图。

解：

分子：$N(s) = s+2$（系数 $b_1 = 1, b_0 = 2$）分母：$D(s) = s^2+3s+2$（系数 $a_1 = 3, a_0 = 2$）

```
x(t) →  →[1/s] →[1/s] → y(t)
      ↑
     [-3]←


     [-2]←




      ↓       ↓
     [2]     [1]
```

更标准的形式：

```


                          ↓
x  →  → 1/s  →  → 1/s  →  → y
    ↑       ↑



     [-3]


      [-2]
```

```
y(t) = w(t) + 2w'(t) 的系数对应：
    [-2]和[-3]是反馈系数
    [1]和[2]是前馈系数
```

更清晰的标准形式：

```
                    [2]  →

x  →  →  →  →   [1]  →  → y
   ↑       ↑

    3

     2
```

4.9.3 级联型实现

将系统函数分解为多个一阶/二阶系统的乘积：

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot \cdots \cdot H_k(s)$$

每个子系统用直接型实现，然后串联。

4.9.4 并联型实现

将系统函数分解为多个一阶/二阶系统的和（部分分式展开）：

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) + \cdots + H_k(s)$$

每个子系统用直接型实现，然后并联（输入相同，输出相加）。

例题 12：并联型实现 $H(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$，画出并联型方框图。

解：

```
      → 2/(s+1)   →
x                      → y
      → -1/(s+2)  →
```

每个一阶子系统：

$H_1(s) = \frac{2}{s+1}$：

```
x  →  →  → 2y1
   ↑
  [-1]
```

$H_2(s) = -\frac{1}{s+2}$：

```
x  →  →  → -y2
     ↑
    [-2]
```

0.6.11 4.10 用拉普拉斯变换分析电路

4.10.1 电路元件的 s 域模型

元件	时域关系	s 域关系
电阻 R	$v(t) = Ri(t)$	$V(s) = RI(s)$
电容 C	$i(t) = C\frac{dv}{dt}$	$I(s) = C[sV(s) - v(0^-)]$
电感 L	$v(t) = L\frac{di}{dt}$	$V(s) = L[sI(s) - i(0^-)]$

例题 13：RLC 电路分析 RLC 串联电路，$R = 2\Omega$，$L = 1H$，$C = 0.5F$，初始条件 $i(0^-) = 1A$，$v_c(0^-) = 0V$，输入电压 $v_s(t) = u(t)V$，求电流 $i(t)$。

解:

电路方程:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt = v_s(t)$$

代入数值:

$$\frac{di}{dt} + 2i + 2\int idt = u(t)$$

取拉普拉斯变换（含初始条件）:

$$[sI(s) - i(0^-)] + 2I(s) + \frac{2}{s}I(s) = \frac{1}{s}$$

$$sI(s) - 1 + 2I(s) + \frac{2}{s}I(s) = \frac{1}{s}$$

整理:

$$I(s)\left(s + 2 + \frac{2}{s}\right) = \frac{1}{s} + 1$$

$$I(s)\frac{s^2 + 2s + 2}{s} = \frac{1 + s}{s}$$

所以：

$$I(s)=\frac{s+1}{s^2+2s+2}=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

反变换：

$$\boxed{i(t)=e^{-t}\cos(t)u(t)}$$

0.6.12 4.11 零基础学生常见困惑

Q1：s 到底是什么？为什么是复数？

A：$s=\sigma+j\omega$ 是一个**复频率**。$j\omega$ 部分表示振荡（频率），σ 部分表示衰减或增长（包络）。当 $\sigma=0$ 时，$s=j\omega$，拉普拉斯变换退化为傅里叶变换。

直观理解：- $e^{j\omega t}$：等幅正弦振荡（纯频率）- $e^{\sigma t}$：指数增长或衰减（包络）- $e^{(\sigma+j\omega)t}$：增长或衰减的正弦振荡

Q2：ROC 的 $\Re\{s\}>-a$ 是什么意思？

A：$\Re\{s\}>-a$ 在 s 平面中是竖直线 $s=-a$ 右侧的所有区域。例如 $e^{-2t}u(t)$ 的拉普拉斯变换是 $1/(s+2)$，ROC 为 $\Re\{s\}>-2$。

```
Im
↑
  → Re
 -2     （阴影区域为 s = -2 右侧）
```

Q3：部分分式展开时，分子次数高于分母怎么办？

A：用多项式除法。比如 $\frac{s^3+2s}{s+1}$，做除法：

s^3 除以 s 得 s^2，乘以 $(s+1)$ 得 s^3+s^2，减去得 $-s^2+2s$... 最终：$s^2-s+1-\frac{1}{s+1}$

Q4：初值定理和终值定理什么时候不能用？

A：- **初值定理**：- 当 $x(t)$ 在 $t=0$ 处有冲激及其导数时，初值定理给出的是 $x(0^+)$ 而非 $x(0^-)$ - 如果 $X(s)$ 不是真分式（分子阶数 $\geq$ 分母阶数），初值可能为无穷大 - **终值定理**：- 如果 $sX(s)$ 有右半平面或虚轴上的极点（除了 $s=0$），终值定理不适用 - 系统必须稳定（或至少不振荡发散）

Q5：零极点和频率响应有什么关系？

A：这是一个非常重要的概念！

- **零点靠近虚轴**：在该频率处幅度响应有**凹陷**

- **极点靠近虚轴**：在该频率处幅度响应有**尖峰**（谐振）
- **极点离虚轴越远**：谐振峰越平坦、越宽

这就是为什么通过零极点图可以快速估计系统频率响应形状的原因。

Q6: 系统函数 $H(s)$ 的极点都在左半平面，系统就一定稳定吗？

A：对于**因果** LTI 系统，是的。但要注意：- 如果系统非因果，稳定性要求 ROC 包含 $j\omega$ 轴 - $H(s)$ 的极点必须在 ROC 的左边（右边信号）或右边（左边信号）- 因果系统的 ROC 在极点右侧，因此所有极点必须在左半平面

Q7: 方框图中的积分器怎么用运放实现？

A：运放积分器电路：

```
      C



R



vi           → vo



          GND
```

$v_o(t) = -\frac{1}{RC}\int v_i(t)dt$

这就是为什么模拟计算机中用运放实现积分运算。

Q8: 什么时候用拉普拉斯变换，什么时候用傅里叶变换？

情景	用哪个	原因
求解微分方程	拉普拉斯	自动处理初始条件
分析频率特性	傅里叶	直接得到频率响应
稳定性分析	拉普拉斯	用极点位置判断
调制解调	傅里叶	频移性质更直观
含冲激信号	拉普拉斯	收敛域更宽

情景	用哪个	原因

0.6.13 4.12 本章小结

核心公式

概念	公式
拉普拉斯变换	$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$
反变换	$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$
时域微分	$\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(0^-)$
时域积分	$\mathcal{L}\{\int xdt\} = X(s)/s$
时域卷积	$\mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} = X(s)H(s)$
初值定理	$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$
终值定理	$x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$（稳定时）
系统函数	$H(s) = Y(s)/X(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$
稳定性	所有极点 $\Re\{p_i\} < 0$

必须掌握的能力

1. 能求常见信号的拉普拉斯变换
2. 能确定收敛域 (ROC)
3. 能用部分分式展开求拉普拉斯反变换
4. 能用拉普拉斯变换求解微分方程
5. 能求系统的系统函数 $H(s)$ 和冲激响应 $h(t)$
6. 能通过零极点位置判断系统稳定性
7. 能画出系统的直接型、级联型、并联型方框图

拉普拉斯变换求解流程总结

```
微分方程 + 初始条件
        ↓ (取拉普拉斯变换)
s域代数方程
        ↓ (解代数方程)
Y(s)
        ↓ (部分分式展开)
```

简单项之和
        ↓ (反变换查表)
y(t)

与后续章节的联系

- 第 6 章 (Z 变换): 离散域的" 拉普拉斯变换"
- 第 7 章 (系统函数): 基于 $H(s)$ 的进一步分析
- 第 8 章 (离散 Z 域分析): 连续和离散的统一视角

0.7 第 5 章: 离散时间信号与系统

0.7.1 本章学习目标

- 理解离散时间信号的表示方法
- 熟悉基本离散序列及其运算
- 理解采样过程: 连续到离散的转换
- 掌握差分方程的建立和求解
- 理解离散卷积和的概念和计算
- 掌握离散系统的冲激响应和阶跃响应
- 理解离散系统的因果性和稳定性判据

0.7.2 5.1 离散时间信号概述

5.1.1 什么是离散时间信号?

离散时间信号 (也称为**序列**) 只在离散的时间点上定义。通常表示为 $x[n]$, 其中 n 是整数。

与连续信号的区别:

特性	连续信号 $x(t)$	离散信号 $x[n]$
自变量	t 是任意实数	n 是整数
括号	圆括号	方括号
取值	任意时刻都有定义	只在整数点有定义
来源	物理信号	采样或计算生成

通俗理解: - 连续信号: 就像连续的流水, 每时每刻都在变化 - 离散信号: 就像每隔 1 秒拍一张照片, 只记录离散时刻的" 快照"

5.1.2 序列的表示方法

公式法:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

图形法：用竖线表示每个 n 处的值

```
x[n]
 1



   0.5

    0.25

     0.125
      → n
 0  1  2  3
```

数列法:

$$x[n] = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}, \quad n \geq 0$$

0.7.3 5.2 基本序列

5.2.1 单位脉冲序列 $\delta[n]$

定义:

$$\boxed{\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}}$$

通俗理解：离散版的" 冲激信号"，但比连续版的简单得多——就是 $n = 0$ 处的一个"1"。

筛选性质:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]}$$

与单位冲激的关系：连续冲激 $\delta(t)$ 是" 无限高、无限窄、面积为 1" 的广义函数，而离散脉冲 $\delta[n]$ 仅仅是一个值为 1 的序列点——简单得多！

5.2.2 单位阶跃序列 $u[n]$

定义:

$$\boxed{u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}}$$

注意：与连续阶跃不同，离散阶跃在 $n = 0$ 处定义为 1（而不是 $1/2$）。

与脉冲的关系:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

5.2.3 矩形序列 $R_N[n]$

定义:

$$\boxed{R_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}}$$

用阶跃表示:

$$R_N[n] = u[n] - u[n-N]$$

5.2.4 实指数序列

$$\boxed{x[n] = a^n u[n]}$$

- $|a| < 1$：衰减序列
- $|a| > 1$：增长序列
- $a > 0$：全正/全负（单调）
- $a < 0$：正负交替（振荡）

5.2.5 复指数序列

$$\boxed{x[n] = e^{(\sigma + j\Omega_0)n} = e^{\sigma n} e^{j\Omega_0 n}}$$

与连续复指数的区别:

一个重要区别：离散复指数在频率上的周期性：

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} e^{j2\pi n} = e^{j\Omega_0 n}$$

因为 n 是整数，$e^{j2\pi n} = 1$。

所以离散复指数在 Ω_0 和 $\Omega_0 + 2\pi$ 处**完全相同**！这意味着离散频率只在 2π 范围内是唯一的（通常取 $[-\pi, \pi]$ 或 $[0, 2\pi]$）。

通俗理解：连续频率可以无限高，但离散频率只在 2π 范围内有意义——超过 2π 的" 高频" 和某个 $[0, 2\pi]$ 内的" 低频" 是相同的。

5.2.6 正弦序列

$$\boxed{x[n] = A\cos(\Omega_0 n + \phi)}$$

重要：正弦序列不一定是周期的！只有当 $\Omega_0/2\pi$ 是有理数时，序列才是周期的。

0.7.4 5.3 采样过程：连续到离散的转换

5.3.1 理想采样

采样是通过周期性的脉冲序列实现的：

$$x[n] = x_c(nT_s)$$

其中 T_s 是采样周期，$f_s = 1/T_s$ 是采样频率。

5.3.2 采样定理回顾

从前面的内容我们知道（第 3 章）：

- 如果 $x_c(t)$ 的最高频率为 f_M，必须满足 $f_s \geq 2f_M$
- 否则会产生**混叠**（Aliasing）

5.3.3 连续频率与离散频率的关系

$$\Omega = \omega T_s = \frac{2\pi f}{f_s}$$

其中 Ω 是离散频率（弧度/样本），ω 是连续频率（弧度/秒）。

重要关系：- 连续频率 $\omega_s = 2\pi/T_s$ 对应离散频率 $\Omega = 2\pi$ - 连续频率 $\omega_s/2 = \pi/T_s$（Nyquist 频率）对应离散频率 $\Omega = \pi$ - 数字滤波器的设计规格通常由连续频率转换得到

0.7.5 5.4 离散 LTI 系统的差分方程描述

5.4.1 差分方程的形式

离散 LTI 系统可以用**常系数线性差分方程**描述：

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}$$

更常见的形式：

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$$

通俗理解：当前的输出 $y[n]$ 由过去的输出值和过去的输入值共同决定。

5.4.2 差分方程的阶数

系统的阶数由 N 决定（需要多少个过去输出值）。- 一阶：$y[n] + a_1 y[n-1] = b_0 x[n]$ - 二阶：$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$

5.4.3 初始条件

求解差分方程需要初始条件。对于 N 阶差分方程，需要 N 个初始条件：

$$y[-1], y[-2], \cdots, y[-N]$$

0.7.6 5.5 差分方程的求解

5.5.1 迭代法

通过递归计算逐点求出输出。适用于计算机实现。

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] - a_1 y[n-1]$$

已知 $y[-1]$，可以依次求出 $y[0], y[1], y[2], \cdots$

例题 1：迭代法求解 系统 $y[n] + \frac{1}{2} y[n-1] = x[n]$，初始条件 $y[-1] = 1$，输入 $x[n] = u[n]$。

解：

先改写为：

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{2} y[n-1]$$

迭代计算：

- $n = 0$：$y[0] = x[0] - \frac{1}{2} y[-1] = 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$
- $n = 1$：$y[1] = x[1] - \frac{1}{2} y[0] = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
- $n = 2$：$y[2] = x[2] - \frac{1}{2} y[1] = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$
- $n = 3$：$y[3] = x[3] - \frac{1}{2} y[2] = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{11}{16}$

可以看出 $y[n]=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n$（由后续 Z 变换可以求出闭式解）。

5.5.2 经典解法

与微分方程类似，差分方程的解也分为齐次解和特解。

齐次解：求解特征方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^{N-k}=0$$

特征根与齐次解的对应：

特征根	齐次解形式
单实根 λ	$C\lambda^n$
r 重实根 λ	$(C_0+C_1n+\cdots+C_{r-1}n^{r-1})\lambda^n$
共轭复根 $\lambda=re^{\pm j\theta}$	$r^n[A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta)]$

特解：根据输入 $x[n]$ 的形式选择

输入形式	特解形式
常数 A	常数 C
a^n	Ca^n（a 不是特征根）
n^m	$C_0+C_1n+\cdots+C_mn^m$

例题 2：经典法求解 系统 $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=x[n]$，输入 $x[n]=2^nu[n]$，初始条件 $y[-1]=0,y[-2]=0$，求 $y[n]$。

解：

齐次解：特征方程 $\lambda^2+3\lambda+2=0$，特征根 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$

齐次解：$y_h[n]=C_1(-1)^n+C_2(-2)^n$

特解：输入为 2^n，2 不是特征根，设 $y_p[n]=K\cdot 2^n$

代入差分方程：

$$K\cdot 2^n+3K\cdot 2^{n-1}+2K\cdot 2^{n-2}=2^n$$

$$K\left(1+\frac{3}{2}+\frac{2}{4}\right)=K\left(1+1.5+0.5\right)=3K=1$$

$$K=\frac{1}{3}$$

所以 $y_p[n] = \frac{1}{3} \cdot 2^n$
完全解:

$$y[n] = C_1(-1)^n + C_2(-2)^n + \frac{1}{3} \cdot 2^n, \quad n \geq 0$$

利用初始条件 $y[-1] = 0, y[-2] = 0$ 确定常数。对于零状态响应，可用 $y[0], y[1]$ 确定:

$$y[0] = b_0 x[0] = 1$$

$$y[1] = -3y[0] + x[1] = -3 + 2 = -1$$

代入:

$$y[0] = C_1 + C_2 + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{2}{3}$$

$$y[1] = -C_1 - 2C_2 + \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow -C_1 - 2C_2 = -\frac{5}{3}$$

解得: $C_1 = 1$，$C_2 = -\frac{1}{3}$
所以:

$$\boxed{y[n] = (-1)^n - \frac{1}{3}(-2)^n + \frac{1}{3} \cdot 2^n, \quad n \geq 0}$$

0.7.7 5.6 离散卷积和

5.6.1 卷积和的定义

离散卷积和（Convolution Sum）是两个离散序列的运算:

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$$

5.6.2 卷积和的物理意义

与连续卷积类似: 任意离散信号可以分解为脉冲序列的叠加:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

系统的输出:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

5.6.3 卷积和的图形计算

步骤与连续卷积类似：

翻转 → 平移 → 相乘 → 求和

翻转：$h[k]\to h[-k]$ **平移**：$h[-k]\to h[n-k]$（右移 n）**相乘**：$x[k]\cdot h[n-k]$ **求和**：对所有 k 求和

例题 3：卷积和计算 已知 $x[n]=\{1,2,3\}$（$n=0,1,2$），$h[n]=\{1,1\}$（$n=0,1$），求 $y[n]=x[n]*h[n]$。

解：

直接用定义：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=0}^{2}x[k]h[n-k]$$

由于 $h[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$，也可以利用分配律：

$$y[n]=x[n]*(\delta[n]+\delta[n-1])=x[n]+x[n-1]$$

所以：

- $y[0]=x[0]+x[-1]=1+0=1$
- $y[1]=x[1]+x[0]=2+1=3$
- $y[2]=x[2]+x[1]=3+2=5$
- $y[3]=x[3]+x[2]=0+3=3$
- $y[4]=x[4]+x[3]=0+0=0$

所以 $y[n]=\{1,3,5,3\}$（$n=0,1,2,3$）。

例题 4：图形法计算卷积和 $x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$，求 $y[n]=x[n]*h[n]$。

解：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}u[n-k]$$

$u[n-k]$ 要求 $n-k\ge 0$，即 $k\le n$。

所以求和范围：k 从 0 到 $\min(2, n)$。

情况 1：$n < 0$，$y[n] = 0$

情况 2：$0 \le n \le 2$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n} 2^k$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot (2^{n+1} - 1) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

情况 3：$n \ge 2$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{2} 2^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} (1 + 2 + 4) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

所以：

$$\boxed{y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 2 - (1/2)^n, & 0 \le n \le 2 \\ 7(1/2)^n, & n \ge 2 \end{cases}}$$

5.6.4 卷积和的性质

与连续卷积完全类似：

1. **交换律**：$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
2. **分配律**：$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$
3. **结合律**：$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$
4. **与脉冲的卷积**：$x[n] * \delta[n] = x[n]$，$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$

0.7.8 5.7 离散系统的冲激响应和阶跃响应

5.7.1 冲激响应 $h[n]$

定义：系统在零初始条件下，对 $\delta[n]$ 的响应。

$$\delta[n] \to \boxed{\text{系统}} \to h[n]$$

与差分方程的关系：当 $x[n] = \delta[n]$ 时，差分方程的解就是 $h[n]$。

例题 5：求冲激响应　系统 $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$，求冲激响应。

解：

令 $x[n]=\delta[n]$，$y[n]=h[n]$，零初始条件 $h[-1]=0$。
当 $n\geq 0$ 时，差分方程为：

$$h[n]+\frac{1}{2}h[n-1]=0,\quad n\geq 1$$

齐次解形式：$h[n]=C\left(-\frac{1}{2}\right)^n$
由 $n=0$ 的初始条件：$h[0]+\frac{1}{2}h[-1]=\delta[0]=1$，所以 $h[0]=1$
代入得 $C=1$
所以：

$$\boxed{h[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]}$$

5.7.2 阶跃响应 $s[n]$

定义：系统在零初始条件下，对 $u[n]$ 的响应。
与冲激响应的关系：

$$s[n]=h[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$$

0.7.9 5.8 离散系统的因果性和稳定性

5.8.1 因果性的时域判据

定理：离散 LTI 系统是因果的，当且仅当 $h[n]=0$ 对 $n<0$。
通俗理解：因果系统的输出不能依赖于未来的输入。

例题 6：判断因果性

(1) $h[n]=a^n u[n]\rightarrow$ 因果（$n<0$ 时为零）
(2) $h[n]=a^n u[n+1]\rightarrow$ 非因果（$n=-1$ 时非零）
(3) $y[n]=x[n]+x[n+1]\rightarrow$ 非因果（需要未来输入）

5.8.2 稳定性的时域判据

定理：离散 LTI 系统是 BIBO 稳定的，当且仅当冲激响应**绝对可和**：

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty}$$

例题 7：判断稳定性

(1) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{2}\right|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-1/2} = 2 < \infty \quad \rightarrow \text{稳定}$$

(2) $h[n] = 2^n u[n]$：

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = \infty \quad \rightarrow \text{不稳定}$$

(3) $h[n] = u[n]$：

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty \quad \rightarrow \text{不稳定}$$

0.7.10 5.9 零基础学生常见困惑

Q1：离散信号 $x[n]$ 和连续信号 $x(t)$ 的根本区别是什么?

A：- $x(t)$ 的 t 是连续实数，$x[n]$ 的 n 是**整数** - 所以 $x[1.5]$ 是没有定义的！n 只能是整数 - 离散信号本质上是一个**序列**（有序数列），而不是一个”函数”

Q2：为什么离散复指数频率只在 2π 范围内唯一?

A：因为对于离散信号：

$$e^{j(\Omega+2\pi)n} = e^{j\Omega n} \cdot e^{j2\pi n} = e^{j\Omega n} \cdot 1 = e^{j\Omega n}$$

所以频率 Ω 和 $\Omega + 2\pi$ 是不可区分的。这就像在数字世界中，“最高频率”就是 $f_s/2$ (对应 $\Omega = \pi$)。

Q3：差分方程和微分方程什么关系?

A：微分方程描述连续系统，差分方程描述离散系统。两者的关系可以通过**差分近似导数**来理解：

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y[n] - y[n-1]}{T_s}$$

其中 T_s 是采样间隔。所以微分方程在采样后近似为差分方程。如果学过 Z 变换（第 6 章），可以看出两者在变换域中形式非常相似。

Q4：卷积和的计算有什么技巧?

A：

1. **有限长序列**：可以用”竖式乘法”（像做乘法一样把对应项对齐相乘相加）
2. **无限长序列**：通常用公式推导
3. **利用性质**：如果 $h[n]$ 是简单的脉冲组合，用分配律可以大大简化

Q5: 离散系统的因果性和连续系统一样判断吗？

A：基本一样，但有一个重要区别：

连续系统：$h(t) = 0, t < 0$ **离散系统**：$h[n] = 0, n < 0$

都是”输出不依赖未来输入”的含义。

0.7.11 5.10 本章小结

核心公式

概念	公式
差分方程	$\sum a_k y[n-k] = \sum b_k x[n-k]$
卷积和	$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$
冲激响应	$h[n] = T\{\delta[n]\}$
阶跃响应	$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$
因果性	$h[n] = 0, n < 0$
稳定性	$\sum \lvert h[n] \rvert < \infty$

必须掌握的能力

1. 能写出常见离散序列的数学表达式（$\delta[n], u[n], a^n u[n]$）
2. 能用迭代法求解差分方程
3. 能用经典法求解差分方程
4. 能计算两个序列的卷积和
5. 能求离散系统的冲激响应
6. 能判断离散系统的因果性和稳定性

与后续章节的联系

- 第 6 章（Z 变换）：差分方程的 Z 域求解、离散系统函数
- 第 8 章（离散 Z 域分析）：离散系统的系统函数和频率响应

0.8 第 6 章：Z 变换

0.8.1 本章学习目标

- 理解 Z 变换的定义及其与拉普拉斯变换的关系
- 掌握收敛域 (ROC) 的概念和性质
- 熟记常用序列的 Z 变换对
- 掌握 Z 变换的性质
- 掌握 Z 反变换的方法（部分分式展开法、幂级数展开法）
- 能用 Z 变换求解差分方程
- 理解离散系统函数 $H(z)$ 的概念

0.8.2 6.1 Z 变换的定义

6.1.1 从拉普拉斯变换到 Z 变换

回顾：连续信号的拉普拉斯变换为 $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$。

对于离散信号 $x[n]$，如果将其视为冲激串：

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s)$$

其拉普拉斯变换为：

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-nsT_s}$$

令 $z = e^{sT_s}$，得到 **Z 变换**：

$$\boxed{X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}}$$

通俗理解：Z 变换是离散信号的” 拉普拉斯变换”。就像拉普拉斯变换将连续微分方程变成代数方程一样，Z 变换将离散差分方程变成代数方程。

6.1.2 单边和双边 Z 变换

双边 Z 变换：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

单边 Z 变换（本课程主要使用）：

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}}$$

6.1.3 Z 变换与拉普拉斯变换的关系

$$z = e^{sT_s}$$

其中 T_s 是采样周期。

关系图解：

```
s平面（s =  + j ）            z平面（z = re^{jΩ}）

      左半平面 ← → 单位圆内
      右半平面 ← → 单位圆外
      虚轴     ← → 单位圆上
      s = 0    ← → z = 1
      s = j _s/2 ← → z = -1
```

通俗理解：s 平面的左半平面映射到 z 平面的单位圆内，s 平面的虚轴映射到 z 平面的单位圆上。这个映射关系解释了为什么连续系统的稳定性判别（极点左半平面）对应离散系统的稳定性判别（极点在单位圆内）。

0.8.3 6.2 收敛域（ROC）

6.2.1 ROC 的定义

Z 变换的收敛域是使级数 $\sum x[n]z^{-n}$ 收敛的 z 值的集合。

收敛条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z|^{-n} < \infty$$

6.2.2 ROC 的图形表示

ROC 在 z 平面上表示（z 平面：横轴为 $\Re\{z\}$，纵轴为 $\Im\{z\}$）：

```
      Im
      ↑
           ROC用阴影区域表示（通常为圆外或圆环）
         → Re
```

6.2.3 ROC 的性质

1. ROC 是 z 平面上的一个环形区域（或圆外/圆内区域）
2. ROC 内**不含任何极点**
3. 如果 $x[n]$ 是右边序列（$n < N_0$ 时 $x[n] = 0$），ROC 在**最大极点模值的外侧**
4. 如果 $x[n]$ 是左边序列（$n > N_0$ 时 $x[n] = 0$），ROC 在**最小极点模值的内侧**
5. 如果 $x[n]$ 是双边序列，ROC 是一个环形区域
6. 如果 $x[n]$ 是有限长序列，ROC 是整个 z 平面（可能不包括 0 或 ∞）

6.2.4 常见序列的 ROC

序列	Z 变换	ROC
$\delta[n]$	1	全部 z
$\delta[n-k], k > 0$	z^{-k}	$z \neq 0$
$\delta[n+k], k > 0$	z^k	$z \neq \infty$
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$vertzvert > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$vertzvert < 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$vertzvert > vertavert$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$vertzvert < vertavert$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$vertzvert > vertavert$
$r^n \cos(\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-r\cos(\Omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\Omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$vertzvert > vertrvert$
$r^n \sin(\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{r\sin(\Omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\Omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$vertzvert > vertrvert$

重要：和拉普拉斯变换一样，相同的 $X(z)$ 表达式，不同的 ROC 对应不同的序列！

例题 1：确定 ROC 求序列 $x[n] = (2)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ 的 Z 变换和 ROC。

解：

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > 2$$

第一个分式的 ROC 是 $|z| > 2$，第二个分式的 ROC 是 $|z| > 1/3$，取交集得 $|z| > 2$。

0.8.4 6.3 常用序列的 Z 变换对

6.3.1 基本序列

时域 $x[n]$	Z 域 $X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	全部 z
$\delta[n-k]$	z^{-k}	$z \neq 0$
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|zvert > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|zvert < 1$

6.3.2 指数序列

时域 $x[n]$	Z 域 $X(z)$	ROC
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|zvert > \|avert$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|zvert < \|avert$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|zvert > \|avert$
$n^2 a^n u[n]$	$\frac{az^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$	$\|zvert > \|avert$

6.3.3 正余弦序列

时域 $x[n]$	Z 域 $X(z)$	ROC
$\cos(\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-\cos(\Omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|zvert > 1$
$\sin(\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{\sin(\Omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|zvert > 1$

0.8.5 6.4 Z 变换的性质

6.4.1 线性性质

$$\boxed{\mathcal{Z}\{ax_1[n]+bx_2[n]\} = aX_1(z)+bX_2(z)}$$

ROC：两个 ROC 的交集（可能扩大）。

6.4.2 时移性质（非常重要）

对于**单边** Z 变换：

$$\boxed{\mathcal{Z}\{x[n-k]\} = z^{-k}X(z) + \sum_{m=0}^{k-1} x[m-k]z^{-m}}$$

对于右边序列（$x[n]=0,\ n<0$）：

$$\boxed{\mathcal{Z}\{x[n-k]\} = z^{-k}X(z)}$$

$$\boxed{\mathcal{Z}\{x[n+k]\} = z^{k}X(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x[m]z^{k-m}}$$

通俗理解：时移对应 z 域乘以 z^{-k}（延时）或 z^{k}（超前）。与拉普拉斯变换的 e^{-st_0} 相对应。

6.4.3 z 域尺度变换

$$\boxed{\mathcal{Z}\{a^n x[n]\} = X\left(\frac{z}{a}\right)}$$

通俗理解：时域乘以 a^n，相当于 z 域中缩放 z 变量。

例题 2：利用 z 域尺度变换 已知 $\mathcal{Z}\{u[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$，$|z|>1$，求 $\mathcal{Z}\{a^n u[n]\}$。

解：

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1-(z/a)^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|>|a|$$

6.4.4 卷积性质

$$\boxed{\mathcal{Z}\{x[n]*h[n]\} = X(z)H(z)}$$

这是 Z 变换最重要的性质！时域卷积变为 z 域乘法。

6.4.5 初值定理

如果 $x[n]=0$ 对于 $n<0$，则：

$$\boxed{x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)}$$

6.4.6 终值定理

如果 $x[n]$ 的极限存在（即系统稳定），则：

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)}$$

使用条件：$(1-z^{-1})X(z)$ 的极点都在单位圆内。

0.8.6 6.5 Z 反变换

6.5.1 部分分式展开法

与拉普拉斯反变换类似，将 $X(z)$ 展开为简单项的和，然后查表。

基本思路：

1. 先将 $X(z)$ 写成 z^{-1} 的有理函数形式
2. 对 $X(z)/z$（或 $X(z)$）做部分分式展开
3. 乘以 z 得到 $X(z)$ 的展开式
4. 逐项查表反变换

例题 3：部分分式展开法 求 $X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$，$|z| > 1$ 的反变换。

解：

先写成 z 的有理函数形式。令 $X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$。

对 $X(z)/z$ 做部分分式展开：

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.5}$$

$$A = \left.\frac{z}{z-0.5}\right|_{z=1} = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$B = \left.\frac{z}{z-1}\right|_{z=0.5} = \frac{0.5}{-0.5} = -1$$

所以：

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-0.5}$$

$$X(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5} = \frac{2}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

因为 ROC 是 $|z| > 1$，对应右边（因果）序列：

$$\boxed{x[n] = (2-(0.5)^n)u[n]}$$

例题 4：含多重极点 求 $X(z)=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$，$|z|>1$ 的反变换。

解:

$$X(z)=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

已知 $\mathcal{Z}\{nu[n]\}=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$，$|z|>1$

所以:

$$\boxed{x[n]=nu[n]}$$

6.5.2 幂级数展开法（长除法）

将 $X(z)$ 展开为 z^{-1} 的幂级数，系数就是 $x[n]$。

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots$$

方法：对 $X(z)$ 进行长除，z^{-1} 的系数就是 $x[n]$。

例题 5：长除法 求 $X(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$，$|z|>0.5$ 的反变换。

解:

做长除:

```
          1 + 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2} + ...

1-0.5z^{-1} ) 1
              1 - 0.5z^{-1}

                    0.5z^{-1}
                    0.5z^{-1} - 0.25z^{-2}

                             0.25z^{-2}
                             ...
```

所以 $x[n]=\{1,0.5,0.25,0.125,\cdots\}=(0.5)^nu[n]$

适用于: - 需要前几项的值 - 不适合求闭式表达式

0.8.7 6.6 用 Z 变换求解差分方程

6.6.1 求解步骤

1. 对差分方程两边取 Z 变换（利用时移性质包含初始条件）

2. 解代数方程得到 $Y(z)$
3. 对 $Y(z)$ 进行部分分式展开
4. 取 Z 反变换得到 $y[n]$

例题 6：用 Z 变换求解差分方程 系统 $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=x[n]$，初始条件 $y[-1]=0$，$y[-2]=0$，输入 $x[n]=2^n u[n]$，求 $y[n]$。

解：

第一步：取 Z 变换

注意 $y[-1]=y[-2]=0$（零状态），且 $x[n]$ 是因果序列，右边序列的时移只乘以 z^{-k}。

$$Y(z)+3z^{-1}Y(z)+2z^{-2}Y(z)=X(z)$$

$$(1+3z^{-1}+2z^{-2})Y(z)=X(z)$$

第二步：代入 $X(z)$

$$X(z)=\mathcal{Z}\{2^n u[n]\}=\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

所以：

$$Y(z)=\frac{1}{(1+3z^{-1}+2z^{-2})(1-2z^{-1})}=\frac{1}{(1+z^{-1})(1+2z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

第三步：部分分式展开

写成 z 的形式：$Y(z)=\frac{z^3}{(z+1)(z+2)(z-2)}$

对 $Y(z)/z$ 展开：

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z^2}{(z+1)(z+2)(z-2)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{z-2}$$

$$A=\left.\frac{z^2}{(z+2)(z-2)}\right|_{z=-1}=\frac{1}{(1)(-3)}=-\frac{1}{3}$$

$$B=\left.\frac{z^2}{(z+1)(z-2)}\right|_{z=-2}=\frac{4}{(-1)(-4)}=1$$

$$C=\left.\frac{z^2}{(z+1)(z+2)}\right|_{z=2}=\frac{4}{(3)(4)}=\frac{1}{3}$$

所以：

$$\frac{Y(z)}{z}=-\frac{1/3}{z+1}+\frac{1}{z+2}+\frac{1/3}{z-2}$$

$$Y(z) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z+1} + \frac{z}{z+2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z-2}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{1}{1+2z^{-1}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

第四步：反变换

因为系统因果（ROC 在最大极点外侧，$|z| > 2$）：

$$\boxed{y[n] = \left[-\frac{1}{3}(-1)^n + (-2)^n + \frac{1}{3}\cdot 2^n\right]u[n]}$$

验证：与第 5 章例题 2 的经典解法结果一致！

6.6.2 含初始条件的 Z 变换求解

当初始条件 $y[-1], y[-2]$ 非零时，需要使用包含初始条件的时移性质：

$$\mathcal{Z}\{y[n-1]\} = z^{-1}Y(z) + y[-1]$$

$$\mathcal{Z}\{y[n-2]\} = z^{-2}Y(z) + y[-2] + y[-1]z^{-1}$$

例题 7：含初始条件 系统 $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$，初始条件 $y[-1] = 1$，输入 $x[n] = u[n]$，求 $y[n]$。

解：

取 Z 变换：

$$Y(z) - \frac{1}{2}[z^{-1}Y(z) + y[-1]] = X(z)$$

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{2} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right) = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{2}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{\frac{2+(1-z^{-1})}{2(1-z^{-1})}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{3-z^{-1}}{2(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

展开：

$$Y(z) = \frac{3-z^{-1}}{2(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

令 $w = z^{-1}$：

$$Y(z) = \frac{3-w}{2(1-w)(1-0.5w)} = \frac{A}{1-w} + \frac{B}{1-0.5w}$$

$$A = \frac{3-w}{2(1-0.5w)}\Big|_{w=1} = \frac{2}{2\cdot 0.5} = 2$$

$$B = \frac{3-w}{2(1-w)}\Big|_{w=2} = \frac{1}{2\cdot(-1)} = -\frac{1}{2}$$

所以：

$$Y(z) = \frac{2}{1-z^{-1}} - \frac{1/2}{1-0.5z^{-1}}$$

反变换（因果）：

$$\boxed{y[n] = \left(2 - \frac{1}{2}(0.5)^n\right)u[n] = (2-(0.5)^{n+1})u[n]}$$

0.8.8 6.7 离散系统的系统函数 $H(z)$

6.7.1 系统函数的定义

对于离散 LTI 系统，系统函数定义为：

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}}$$

在零初始条件下。

6.7.2 系统函数与冲激响应的关系

$$\boxed{H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}}$$

$$\boxed{h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}}$$

6.7.3 从差分方程求系统函数

给定差分方程 $\sum a_k y[n-k] = \sum b_k x[n-k]$，取 Z 变换（零初始条件）：

$$\left(\sum a_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum b_k z^{-k}\right) X(z)$$

所以：

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}}$$

例题 8：从差分方程求系统函数 系统 $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1]$，求 $H(z)$ 和 $h[n]$。

解:

零初始条件取 Z 变换:

$$Y(z) + \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+2z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z+2}{z+0.5}$$

将 $H(z)/z$ 展开:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z+2}{z(z+0.5)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+0.5}$$

$$A = \left.\frac{z+2}{z+0.5}\right|_{z=0} = \frac{2}{0.5} = 4$$

$$B = \left.\frac{z+2}{z}\right|_{z=-0.5} = \frac{1.5}{-0.5} = -3$$

所以:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{4}{z} - \frac{3}{z+0.5}$$

$$H(z) = 4 - \frac{3z}{z+0.5} = 4 - \frac{3}{1+0.5z^{-1}}$$

反变换:

$$h[n] = 4\delta[n] - 3(-0.5)^n u[n]$$

0.8.9 6.8 零极点分析与稳定性

6.8.1 零点和极点

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = K\frac{\prod(z-z_i)}{\prod(z-p_i)}$$

零点 z_i：$N(z) = 0$ 的根 **极点** p_i：$D(z) = 0$ 的根

6.8.2 稳定性判据

因果离散 LTI 系统稳定的充要条件：$H(z)$ 的所有极点都在**单位圆内。**

$$\boxed{|p_i| < 1, \quad \forall i \iff \text{系统稳定}}$$

通俗理解：- 极点在单位圆内 → 冲激响应指数衰减 → 系统稳定 - 极点在单位圆外 → 冲激响应指数增长 → 系统不稳定 - 极点在单位圆上 → 冲激响应等幅振荡 → 临界稳定

例题 9：离散系统稳定性 判断以下系统函数的稳定性（假设因果）：

(1) $H(z) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1+0.2z^{-1})}$
极点：$z = 0.5$，$z = -0.2$，都在单位圆内 → **稳定**

(2) $H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$
极点：$z = 2$，在单位圆外 → **不稳定**

(3) $H(z) = \frac{1}{1+z^{-2}}$
极点：$z = \pm j$，$|z| = 1$，在单位圆上 → **临界稳定**

6.8.3 极点位置与冲激响应的关系

```
z平面              时域波形 h[n]

 圆内（|z|<1）   → 衰减（稳定）
 圆上（|z|=1）   → 等幅（临界稳定）
 圆外（|z|>1）   → 增长（不稳定）

 正实轴          → 单调指数
 负实轴          → 交替振荡
 共轭            → 正弦振荡
```

0.8.10 6.9 零基础学生常见困惑

Q1：z 到底是什么？和 s 有什么关系？

A：z 是**复变量**，与拉普拉斯变换的 s 通过 $z = e^{sT_s}$ 联系。

这个映射的直观理解：- $s = 0$（直流）→ $z = 1$ - $s = j\omega_s/2$（Nyquist 频率）→ $z = e^{j\pi} = -1$ - s 的左半平面 → z 的单位圆内 - s 的虚轴 → z 的单位圆

Q2：为什么 Z 变换的 ROC 总是圆/环状？

A：因为收敛条件取决于 $|z|$，而不是 z 的角度：

$$\sum |x[n]||z|^{-n} < \infty$$

$|z|$ 是极径，所以收敛区域在极坐标下是圆形/环形。

Q3: 部分分式展开时，为什么有时对 $X(z)$ 展开，有时对 $X(z)/z$ 展开？

A：两种做法都可以，区别在于：

- 对 $X(z)/z$ 展开：因为 $X(z)$ 的标准形式 $\frac{z}{z-p}$ 更容易从 $\frac{1}{z-p}$ 得到
- 对 $X(z)$ 直接展开：如果 $X(z)$ 写成 z^{-1} 的多项式，可以直接展开

建议：用 $X(z)/z$ 展开法，可以避免出错。

Q4: 长除法什么时候用？

A：长除法适用于：- 只需要前几项 $x[n]$ 的值（而不是闭式解）- 验证部分分式展开的结果 - 编程实现

缺点是通常得不到闭式表达式。

Q5: 用 Z 变换求解差分方程，和经典法比有什么优势？

A：Z 变换的优势：1. 自动处理初始条件（无需分零输入/零状态）2. 全部是代数运算 3. 可以用系统函数 $H(z)$ 统一分析

就像拉普拉斯变换求解微分方程一样，Z 变换使得求解过程**系统化、程序化**。

Q6: 离散系统稳定性和连续系统稳定性有什么不同？

A：

	连续系统	离散系统
稳定区域	左半 s 平面	单位圆内
判据	$\Re\{p_i\} < 0$	$vertp_ivert < 1$
临界稳定	虚轴上	单位圆上

这个差异来自 $z = e^{sT_s}$ 映射——s 平面的左半平面映射到 z 平面的单位圆内。

0.8.11 6.10 本章小结

核心公式

概念	公式
Z 变换定义	$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$
时移性质	$\mathcal{Z}\{x[n-k]\} = z^{-k}X(z)$（右边序列）
z 域尺度	$\mathcal{Z}\{a^n x[n]\} = X(z/a)$
卷积性质	$\mathcal{Z}\{x[n] * h[n]\} = X(z)H(z)$
初值定理	$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$
终值定理	$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$
系统函数	$H(z) = Y(z)/X(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$
稳定性	所有极点 $vertp_i vert < 1$

必须掌握的能力

1. 能求基本序列的 Z 变换
2. 能用部分分式展开法求 Z 反变换
3. 能用 Z 变换求解差分方程（含/不含初始条件）
4. 能求离散系统的系统函数 $H(z)$ 和冲激响应 $h[n]$
5. 能通过极点位置判断离散系统的稳定性

Z 变换求解差分方程流程

```
差分方程 + 初始条件
        ↓ (取Z变换)
z域代数方程
        ↓ (解代数方程)
Y(z)
        ↓ (部分分式展开)
简单项之和
        ↓ (反变换查表)
y[n]
```

与后续章节的联系

- 第 7 章（系统函数）：$H(z)$ 的进一步分析
- 第 8 章（离散 Z 域分析）：离散系统的完整 Z 域分析

0.9 第 7 章：系统函数与状态变量

0.9.1 本章学习目标

- 理解连续和离散系统的系统函数
- 掌握零极点图的绘制和分析
- 掌握系统稳定性与零极点的关系
- 理解状态变量描述方法
- 掌握状态方程和输出方程的建立
- 理解状态转移矩阵的概念
- 掌握可控性和可观性的基本概念

0.9.2 7.1 连续系统的系统函数回顾

7.1.1 系统函数的定义

对于连续 LTI 系统，系统函数（传递函数）定义为：

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

物理意义：$H(s)$ 描述了系统如何对复指数信号 e^{st} 进行变换。

7.1.2 系统函数的一般形式

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots + b_0}{s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_0}$$

零点：分子多项式 $N(s) = 0$ 的根 **极点**：分母多项式 $D(s) = 0$ 的根

7.1.3 从系统函数到频率响应

对于稳定系统，频率响应等于 $s = j\omega$ 时的系统函数：

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$$

0.9.3 7.2 离散系统的系统函数回顾

7.2.1 系统函数的定义

对于离散 LTI 系统：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathcal{Z}\{h[n]\}$$

7.2.2 一般形式

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

零点：分子多项式 $N(z) = 0$ 的根 **极点**：分母多项式 $D(z) = 0$ 的根

0.9.4 7.3 零极点分析

7.3.1 零极点图

零极点图是在复平面上标记零点和极点的位置：

- $H(s)$ 用 s 平面：横轴 $\Re\{s\}$，纵轴 $\Im\{s\}$
- $H(z)$ 用 z 平面：横轴 $\Re\{z\}$，纵轴 $\Im\{z\}$
- "o" 表示零点，"x" 表示极点

连续系统零极点图示例：

```
     Im
     ↑
  x     o
-2      -1
          → Re
```

$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$，零点在 $s = -1$，极点在 $s = -2, -3$

离散系统零极点图示例：

```
     Im
     ↑
  x
0.5
          → Re
```

$H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$，极点在 $z = 0.5$

7.3.2 从零极点图估计频率响应

连续系统：

$$H(j\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^{M} (j\omega - z_i)}{\prod_{i=1}^{N} (j\omega - p_i)}$$

$$|H(j\omega)| = K\frac{\prod_{i=1}^{M}|j\omega - z_i|}{\prod_{i=1}^{N}|j\omega - p_i|}$$

$$\angle H(j\omega) = \sum_{i=1}^{M}\angle(j\omega - z_i) - \sum_{i=1}^{N}\angle(j\omega - p_i)$$

几何解释：$j\omega$ 轴上的点与各零点/极点连线的长度决定了幅度，角度决定了相位。

通俗理解：- $|j\omega - p_i|$：从极点 p_i 到虚轴上点 $j\omega$ 的向量长度 - 当 ω 靠近某个极点对应的虚轴位置时，分母变小，$|H|$ 变大（谐振峰）- 当 ω 靠近某个零点对应的虚轴位置时，分子变小，$|H|$ 变小（凹陷）

例题 1：从零极点估计频率响应 系统函数 $H(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2+9}$，极点 $s = -2 \pm j3$，零点 $s = -1$。

分析：

- 极点位于 $s = -2 \pm j3$，实部为负 → 系统稳定
- 极点虚部为 ± 3 → 在 $\omega \approx 3$ 附近有谐振峰
- 由于极点离虚轴较远（$\Re\{p\} = -2$），谐振峰较宽、较平坦

例题 2：离散系统频率响应 系统函数 $H(z) = \frac{1}{1-0.9z^{-1}}$（一阶低通），求频率响应。

解：

频率响应：$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-0.9e^{-j\Omega}}$

幅度响应：

$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{1}{|1 - 0.9e^{-j\Omega}|} = \frac{1}{\sqrt{1.81 - 1.8\cos(\Omega)}}$$

- $\Omega = 0$（直流）：$|H(e^{j0})| = \frac{1}{0.1} = 10$
- $\Omega = \pi$（最高频）：$|H(e^{j\pi})| = \frac{1}{1.9} \approx 0.53$

这是一个低通滤波器——直流放大、高频衰减。

7.3.3 零极点对系统特性的影响总结

连续系统

极点位置	时域响应 $h(t)$	稳定性
负实轴	$e^{\sigma t}$ 衰减	稳定
共轭左半平面	$e^{\sigma t}\sin(\omega t)$ 衰减振荡	稳定
原点	阶跃（常数）	临界稳定
虚轴（非原点）	$\sin(\omega t)$ 等幅振荡	临界稳定

极点位置	时域响应 $h(t)$	稳定性
右半平面	增长	不稳定

离散系统

极点位置	时域响应 $h[n]$	稳定性
单位圆内正实轴	a^n 衰减	稳定
单位圆内负实轴	$(-a)^n$ 交替衰减	稳定
单位圆内共轭	$r^n\sin(n\Omega)$ 衰减振荡	稳定
单位圆上	$\sin(n\Omega)$ 等幅振荡	临界稳定
单位圆外	增长	不稳定

0.9.5 7.4 系统稳定性与零极点的关系

7.4.1 连续系统稳定性判据

因果连续 LTI 系统稳定的充要条件：所有极点都在 s 平面的左半平面。

$$\boxed{\Re\{p_i\} < 0, \quad \forall i}$$

等价说法：1. 系统的冲激响应 $h(t)$ 绝对可积：$\int_0^\infty |h(t)|dt < \infty$ 2. 系统函数 $H(s)$ 的所有极点 $\Re\{p_i\} < 0$ 3. 系统的频率响应 $H(j\omega)$ 存在（对任意 ω 有限）

7.4.2 离散系统稳定性判据

因果离散 LTI 系统稳定的充要条件：所有极点都在 z 平面的单位圆内。

$$\boxed{|p_i| < 1, \quad \forall i}$$

等价说法：1. 冲激响应 $h[n]$ 绝对可和：$\sum_{n=0}^\infty |h[n]| < \infty$ 2. 系统函数 $H(z)$ 的所有极点 $|p_i| < 1$ 3. 系统的频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 存在

7.4.3 劳斯-赫尔维茨稳定性判据

对于高阶连续系统，不需要求出极点，可以通过**劳斯-赫尔维茨判据**判断稳定性。

方法：1. 写出特征多项式 $D(s) = a_N s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_0$ 2. 构造劳斯阵列（Routh array）3. 检查第一列元素的符号变化

判据：如果劳斯阵列第一列元素全部为正（或全部为负），则系统稳定。第一列符号变化次数等于右半平面极点数。

例题 3：劳斯判据 判断特征多项式 $D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$ 对应系统的稳定性。

解：

构造劳斯阵列：

```
s^4:  1      3      5
s^3:  2      4      0
s^2:  (2×3-1×4)/2 = 1     (2×5-1×0)/2 = 5
s^1:  (1×4-2×5)/1 = -6
s^0:  (-6×5-1×0)/(-6) = 5
```

第一列：$1, 2, 1, -6, 5$，有符号变化（$1 \to -6$ 和 $-6 \to 5$），所以系统**不稳定**，有 2 个右半平面极点。

7.4.4 Jury 稳定性判据（离散系统）

用于判断离散系统的特征多项式 $D(z)$ 的根是否都在单位圆内。

必要条件：1. $D(1) > 0$ 2. $(-1)^N D(-1) > 0$ 3. $|a_0| < a_N$

对于低阶系统，可以直接求解根或使用这些条件。

0.9.6 7.5 状态变量描述

7.5.1 为什么需要状态变量?

前面的分析方法（微分方程、系统函数）都是**输入-输出描述**，只关心系统的外部特性。但这种方式：

1. 只能描述系统的输入输出关系，不能了解系统内部
2. 不能处理多输入多输出 (MIMO) 系统
3. 不能处理初始条件的影响（被包含在系统函数之外）

状态变量描述则通过一组**内部变量**（状态变量）完整描述系统的行为。

7.5.2 状态的定义

状态：系统在任意时刻 t_0 的状态是能够与输入一起唯一确定系统未来行为的最小信息集。

通俗理解：状态就是系统在某一时刻的”记忆”——知道状态和输入，就能算出未来的输出。

7.5.3 状态方程和输出方程

状态变量描述由两个方程组成：

状态方程（描述状态如何随时间变化）：

连续系统：

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)}$$

离散系统：

$$\boxed{\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n]}$$

输出方程（描述输出与状态和输入的关系）：

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)}$$

其中：- $\mathbf{x}(t)$：状态向量（$N \times 1$）- $\mathbf{u}(t)$：输入向量（$P \times 1$）- $\mathbf{y}(t)$：输出向量（$Q \times 1$）- $\mathbf{A}$：系统矩阵（$N \times N$）- $\mathbf{B}$：输入矩阵（$N \times P$）- $\mathbf{C}$：输出矩阵（$Q \times N$）- $\mathbf{D}$：直接传输矩阵（$Q \times P$）

7.5.4 状态变量的选择

状态变量通常选择系统中**储能元件**的物理量：

系统类型	状态变量
电路	电容电压、电感电流
机械系统	位置、速度
热系统	温度

对于微分方程描述的 SISO（单输入单输出）系统，状态变量通常选择输出及其各阶导数。

例题 4：建立状态方程 系统由微分方程 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t)$ 描述，建立状态方程。

解：

选择状态变量：

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t)$$

则：

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = y''(t) = -3y'(t) - 2y(t) + x(t) = -3x_2(t) - 2x_1(t) + x(t)$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

输出方程：

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]x(t)$$

所以：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = [0]$$

例题 5：含输入导数的状态方程 系统 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 2x(t)$，建立状态方程。

解：

当方程右边有输入导数时，不能简单选择 y 及其导数为状态变量。需要使用**相变量法**。

令状态变量：

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u$$

其中 β 系数由以下关系确定：

对于 $y'' + a_1 y' + a_0 y = b_1 u' + b_0 u$：

$$\beta_0 = b_0 - a_0 \beta_0 \quad ???$$

更标准的方法：

系统函数：$H(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2}$

令中间变量 $w(t)$ 满足 $w'' + 3w' + 2w = x(t)$，则 $y(t) = w'(t) + 2w(t)$。

选择状态变量：

$$x_1 = w, \quad x_2 = w'$$

则：

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = w'' = -3w' - 2w + x = -3x_2 - 2x_1 + x$$

$$y = x_2 + 2x_1$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]x$$

0.9.7 7.6 状态转移矩阵

7.6.1 状态转移矩阵的定义

对于连续系统 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$，**状态转移矩阵**定义为：

$$\boxed{\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}}$$

其中 $e^{\mathbf{A}t}$ 是矩阵指数。

7.6.2 状态转移矩阵的物理意义

$\Phi(t)$ 将初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 转移到 t 时刻的状态（零输入时）：

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0)$$

通俗理解：状态转移矩阵描述了”如果没有外部输入，系统状态如何从初始状态演变”。

7.6.3 状态转移矩阵的计算方法

方法 1：拉普拉斯变换法

$$\boxed{\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}}$$

方法 2：幂级数法

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \cdots$$

例题 6：求状态转移矩阵 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$，求状态转移矩阵 $\Phi(t)$。

解:

计算 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

求逆:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

部分分式展开:

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

所以:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

逐项部分分式:

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{-2}{(s+1)(s+2)} = -\frac{2}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

$$\frac{s}{(s+1)(s+2)} = -\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

反变换:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

验证：$\Phi(0)=\begin{bmatrix}2-1 & 1-1\\ -2+2 & -1+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{I}$

7.6.4 状态方程的解

连续系统：

$$\boxed{\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)+\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau}$$

零输入分量 + **零状态分量**

离散系统：

$$\boxed{\mathbf{x}[n]=\mathbf{A}^n\mathbf{x}[0]+\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{A}^{n-1-k}\mathbf{B}\mathbf{u}[k]}$$

0.9.8 7.7 可控性和可观性

7.7.1 可控性 (Controllability)

定义：如果存在一个无约束的输入 $\mathbf{u}(t)$，能在有限时间内将系统从任意初始状态转移到任意期望状态，则系统是**可控的**。

通俗理解：能否通过控制输入让系统状态变成我们想要的任何值？

可控性判据：N 阶系统可控的充要条件是**可控性矩阵**满秩。

$$\boxed{\mathcal{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\operatorname{rank}(\mathcal{C})=N}$$

7.7.2 可观性 (Observability)

定义：如果能够通过有限时间内的输出 $\mathbf{y}(t)$ 唯一确定系统的初始状态，则系统是**可观的**。

通俗理解：能否通过观察输出来知道系统内部的状态？

可观性判据：N 阶系统可观的充要条件是**可观性矩阵**满秩。

$$\boxed{\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{N-1} \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\operatorname{rank}(\mathcal{O}) = N}$$

例题 7：可控性和可观性判断 系统：$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$。

可控性:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$\det(\mathcal{C}) = 0 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$，所以 $\operatorname{rank}(\mathcal{C}) = 2 = N$，系统**可控。**

可观性:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(\mathcal{O}) = 1 \neq 0$，所以 $\operatorname{rank}(\mathcal{O}) = 2 = N$，系统**可观。**

例题 8：不可控系统 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$（无输入），显然不可控。

更微妙的例子：$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank}(\mathcal{C}) = 1 < 2$，所以系统**不可控**。原因：输入只能影响第一个状态变量，无法控制第二个状态变量。

0.9.9 7.8 系统函数与状态方程的关系

7.8.1 从状态方程求系统函数

对状态方程和输出方程取拉普拉斯变换（零初始条件）：

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s)$$

从第一式解出 $\mathbf{X}(s)$：

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

代入输出方程：

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) + \mathbf{D}U(s)$$

所以：

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}}$$

7.8.2 极点和特征值的关系

从系统函数的表达式可以看出：

$$H(s) = \frac{\mathbf{C} \cdot \mathrm{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + \mathbf{D}$$

系统的极点 $=$ $\mathbf{A}$ **矩阵的特征值**（可能有零极点相消）。

证明：- 系统的极点是 $D(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ 的根 - $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ 正是 $\mathbf{A}$ 的特征方程 - 所以极点就是 $\mathbf{A}$ 的特征值

0.9.10 7.9 零基础学生常见困惑

Q1：状态变量和输出有什么区别？

A：- **状态变量**：描述系统内部的状态（“记忆”），可以有很多个 - **输出**：你可以观测到的量，通常少于状态变量

比如一个 RLC 电路：电容电压和电感电流是状态变量（无法直接测量但描述系统内部），而总电压是输出（可以直接测量）。

Q2：为什么系统函数有时不能完全描述系统？

A：当系统有**零极点相消**时，系统函数失去了一些信息。例如：

$$H(s) = \frac{(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

从输入输出看，似乎是一阶系统，但实际上内部可能包含二阶的动态特性（被消去的极点对应不可控或不可观的模式）。状态变量法可以完整描述这种情况。

Q3: 可控性和可观性有什么实际意义?

A:

概念	实际意义	例子
可控	我能控制系统的所有部分	所有扬声器音量都能调
不可控	有些部分不受控制	某个喇叭坏了，调不了音量
可观	我能知道系统内部状态	能从仪表盘知道引擎状态
不可观	不知道内部发生了什么	仪表盘坏了，不知引擎状态

Q4: 矩阵指数怎么算?

A: 常用三种方法: 1. 拉普拉斯变换: $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}$ 2. 对角化: 如果 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\ \mathbf{P}^{-1}$，则 $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\ t}\mathbf{P}^{-1}$ 3. 凯莱-哈密顿定理：用有限项幂级数计算

Q5: 状态转移矩阵有什么性质?

A: 1. $\Phi(0) = \mathbf{I}$ 2. $\Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0)$（半群性质）3. $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$（可逆性）4. $\frac{d}{dt}\Phi(t) = \mathbf{A}\Phi(t) = \Phi(t)\mathbf{A}$

0.9.11 7.10 本章小结

核心公式

概念	公式
连续状态方程	$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$
输出方程	$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$
离散状态方程	$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n]$
状态转移矩阵	$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}$
状态方程的解	$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}d\tau$
可控性矩阵	$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$

概念	公式
可观性矩阵	$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{CA} & \cdots & \mathbf{CA}^{N-1} \end{bmatrix}^T$
系统函数	$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$

必须掌握的能力

1. 能画系统的零极点图
2. 能从零极点图估计频率响应
3. 能判断系统的稳定性
4. 能建立简单系统的状态方程
5. 能计算状态转移矩阵
6. 能判断系统的可控性和可观性

本章内容在课程中的位置

本章将之前学习的系统函数分析提升到了**状态空间**的高度——从关注输入输出关系到关注系统内部状态。这是从”信号与系统”迈向”现代控制理论”的桥梁。

在后续课程中：- **自动控制原理**：状态反馈、极点配置、状态观测器 - **最优控制**：LQR、Kalman 滤波 - **系统辨识**：从输入输出数据估计状态方程

0.10 第 8 章：离散时间系统 Z 域分析

0.10.1 本章学习目标

- 理解 Z 变换与拉普拉斯变换的关系
- 掌握离散系统的系统函数 $H(z)$
- 理解频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 的概念
- 能用 Z 变换分析离散系统
- 掌握离散系统的稳定性判据

0.10.2 8.1 Z 变换与拉普拉斯变换的关系

8.1.1 从 s 平面到 z 平面的映射

回顾 Z 变换的定义：$z = e^{sT_s}$，其中 T_s 是采样周期。

令 $s = \sigma + j\omega$，则：

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T_s} = e^{\sigma T_s} \cdot e^{j\omega T_s}$$

所以：- $|z| = e^{\sigma T_s}$（极径取决于 σ）- $\angle z = \omega T_s$（辐角取决于 ω）

8.1.2 s 平面到 z 平面的映射关系

```
s平面                  →                 z平面
  = 0 (虚轴)          →    |z| = 1    (单位圆)
  < 0 (左半平面)       →    |z| < 1    (单位圆内)
  > 0 (右半平面)       →    |z| > 1    (单位圆外)
  = 0                 →    z = 0     (正实轴)
  =  _s/2             →    z =       (负实轴)
  =  _s               →    z = 2     (正实轴, 与 =0重合)
```

重要观察：s 平面上宽度为 $\omega_s = 2\pi/T_s$ 的水平带状区域，映射到整个 z 平面。这意味着 s 平面有无穷多个水平带都映射到同一个 z 平面——这就是**多值映射**。

通俗理解：s 平面像无限高的楼层，z 平面像一楼的地面——每层楼（高度 ω_s 的带）都投影到同一地面。这就是为什么离散信号的频率只在 2π（对应 ω_s）范围内是唯一的。

8.1.3 从连续系统到离散系统的映射

如果连续系统的系统函数是 $H_c(s)$，经过采样后，离散系统的系统函数可以通过**冲激响应不变法**得到：

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h_c(nT_s)\}$$

其中 $h_c(t)$ 是连续系统的冲激响应。

0.10.3 8.2 离散系统的系统函数

8.2.1 系统函数的定义回顾

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

系统函数与冲激响应：

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}, \quad h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$$

8.2.2 系统函数的零点、极点和收敛域

$$H(z) = K\frac{\prod_{i=1}^{M}(1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N}(1 - p_i z^{-1})}$$

或者等价的 z 多项式形式：

$$H(z) = K\frac{\prod_{i=1}^{M}(z - z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(z - p_i)} \cdot z^{N-M}$$

因果系统的 ROC：$|z| > \max_i |p_i|$（在最大极点模值的圆外）。

8.2.3 从差分方程到系统函数

给定差分方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

取 Z 变换（零初始条件）：

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right) X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

例题 1：从系统函数到差分方程 已知系统函数 $H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}+0.2z^{-2}}$，写出差分方程。

解：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}+0.2z^{-2}}$$

交叉相乘：

$$Y(z)(1-0.5z^{-1}+0.2z^{-2}) = X(z)(1+2z^{-1})$$

反变换：

$$\boxed{y[n] - 0.5y[n-1] + 0.2y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]}$$

0.10.4 8.3 频率响应 $H(e^{j\Omega})$

8.3.1 频率响应的定义

对于稳定离散系统，频率响应定义为：

$$\boxed{H(e^{j\Omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}}$$

物理意义：当系统输入为 $e^{j\Omega n}$ 时，输出为 $H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}$。

8.3.2 频率响应的计算

给定系统函数 $H(z)$，令 $z = e^{j\Omega}$：

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}}$$

幅度响应：$|H(e^{j\Omega})|$ **相位响应**：$\angle H(e^{j\Omega})$

8.3.3 频率响应的周期性

离散系统的频率响应是 Ω 的周期函数，周期为 2π：

$$H(e^{j(\Omega+2\pi)}) = H(e^{j\Omega})$$

这就是为什么我们通常只关心 $\Omega \in [-\pi, \pi]$ 或 $\Omega \in [0, 2\pi]$ 范围内的频率响应。

通俗理解：在离散系统中，频率 Ω 和 $\Omega + 2\pi$ 是不可区分的——就像 s 平面的多带映射到 z 平面一样。

例题 2：一阶系统的频率响应 系统函数 $H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$，求频率响应。

解：

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-0.5e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1-0.5\cos\Omega + j0.5\sin\Omega}$$

幅度响应：

$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1-0.5\cos\Omega)^2 + (0.5\sin\Omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1.25-\cos\Omega}}$$

相位响应：

$$\angle H(e^{j\Omega}) = -\arctan\left(\frac{0.5\sin\Omega}{1-0.5\cos\Omega}\right)$$

- $\Omega = 0$：$|H(e^{j0})| = \frac{1}{\sqrt{1.25-1}} = \frac{1}{0.5} = 2$，相位 0
- $\Omega = \pi$：$|H(e^{j\pi})| = \frac{1}{\sqrt{1.25-(-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2.25}} \approx 0.67$，相位 $\arctan(0) = 0$

这是一个**低通滤波器**。

8.3.4 从零极点图估计频率响应

和连续系统类似，可以从零极点图估计离散系统的频率响应：

$$|H(e^{j\Omega})| = K\frac{\prod_{i=1}^{M} |e^{j\Omega} - z_i|}{\prod_{i=1}^{N} |e^{j\Omega} - p_i|}$$

几何解释：$e^{j\Omega}$ 是单位圆上的点，从零/极点到单位圆上点的向量长度决定了幅度。

关键观察：- 极点靠近单位圆 → 在该频率附近产生谐振峰 - 零点靠近单位圆 → 在该频率附近产生凹陷 - 零点在单位圆上 → 在该频率处传输完全被阻止（陷波）

0.10.5 8.4 用 Z 变换分析离散系统

8.4.1 系统响应分析

系统总响应：

$$y[n] = \underbrace{y_{zi}[n]}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{y_{zs}[n]}_{\text{零状态响应}}$$

Z 变换方法可以同时求出两者（通过包含初始条件的时移性质）。

8.4.2 系统的稳态响应

对于稳定系统，当输入为正弦序列 $x[n] = \cos(\Omega_0 n)$ 时，稳态输出为：

$$y_{ss}[n] = |H(e^{j\Omega_0})| \cos(\Omega_0 n + \angle H(e^{j\Omega_0}))$$

通俗理解：和连续系统一样，离散 LTI 系统对正弦输入的稳态输出是同频率的正弦，幅度和相位由频率响应决定。

例题 3：正弦稳态响应 系统 $y[n] - 0.5y[n-1] = x[n]$，输入 $x[n] = \cos(\pi n/2)$，求稳态输出。

解：

系统函数：$H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$

频率响应：$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-0.5e^{-j\Omega}}$

在 $\Omega = \pi/2$ 处：

$$H(e^{j\pi/2}) = \frac{1}{1-0.5e^{-j\pi/2}} = \frac{1}{1+0.5j} = \frac{1}{\sqrt{1.25}} e^{-j\arctan(0.5)}$$

$$= 0.894 e^{-j26.6^\circ}$$

所以稳态输出：

$$\boxed{y_{ss}[n] = 0.894 \cos\left(\frac{\pi n}{2} - 26.6^\circ\right)}$$

8.4.3 离散系统的方框图实现

与连续系统类似，离散系统的方框图使用三种基本单元：

单元	符号	时域	z 域
加法器		$x_1 + x_2$	$X_1 + X_2$
数乘器		ax	aX
延迟器	D	$x[n-1]$	$z^{-1}X(z)$

注意：离散系统的基本存储单元是**延迟器**（z^{-1}），而不是积分器。延迟器保存输入值一个采样周期。

直接 II 型实现 对于 $H(z) = \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$：

```
x[n]  →  →z^{-1} →z^{-1} → y[n]
     ↑ -a





       b


       b   →


       b
```

更标准的形式：

```
x[n]  →  →[z^{-1}] →  →[z^{-1}] →  → y[n]
      ↑ -a              ↑ -a




                   b


        b
                                 b
```

例题 4：直接 II 型实现 系统 $H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}+0.2z^{-2}}$，画出直接 II 型方框图。

解：

系数：$b_0 = 1, b_1 = 2, a_1 = -0.5, a_2 = 0.2$

```
x[n] → →[z^{-1}] → →[z^{-1}] → y[n]
       ↑0.5              ↑ -0.2
```

2

1

0

注意：$a_1 = -0.5$，反馈回去要取反，所以实际反馈系数是 0.5；$a_2 = 0.2$，反馈回去取反得到 -0.2。

0.10.6 8.5 离散系统的稳定性判据

8.5.1 稳定性的充要条件

因果离散 LTI 系统稳定的充要条件：

$$\boxed{\text{所有极点}p_i\text{ 满足}|p_i| < 1}$$

等价形式：系统函数 $H(z)$ 的收敛域 ROC 包含单位圆。

8.5.2 从系统函数判断稳定性

对于因果系统，$H(z)$ 的分母多项式 $D(z)$ 的所有根的模都小于 1。

一阶系统 $H(z) = \frac{b_0+b_1z^{-1}}{1+a_1z^{-1}}$，极点在 $z = -a_1$。
稳定条件：$|a_1| < 1$。

二阶系统 $H(z) = \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$
稳定条件（Jury 判据）：

$$|a_2| < 1$$

$$|a_1| < 1 + a_2$$

例题 5：稳定性判断 判断系统 $H(z) = \frac{1}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$ 是否稳定（假设因果）。
解：
极点是 $z^2 - 1.5z + 0.5 = 0$ 的根。

$$z = \frac{1.5 \pm \sqrt{2.25-2}}{2} = \frac{1.5 \pm 0.5}{2}$$

$p_1 = 1$，$p_2 = 0.5$

$|p_1| = 1$（在单位圆上），$|p_2| = 0.5 < 1$

极点 $p_1 = 1$ 在单位圆上，所以系统**临界稳定。**

8.5.3 离散系统稳定性与连续系统稳定性的对应

连续系统	离散系统
极点 $\Re\{p\} < 0$（左半平面）	极点 $\|p\| < 1$（单位圆内）
极点 $\Re\{p\} = 0$（虚轴）	极点 $\|p\| = 1$（单位圆上）
极点 $\Re\{p\} > 0$（右半平面）	极点 $\|p\| > 1$（单位圆外）
$h(t)$ 绝对可积	$h[n]$ 绝对可和

0.10.7 8.6 零基础学生常见困惑

Q1：为什么离散频率 Ω 只在 $[-\pi, \pi]$ 范围内有意义?

A：因为 Ω 和 $\Omega + 2\pi$ 对应的 $z = e^{j\Omega}$ 在单位圆上的位置相同。所以离散信号中的” 最高频率” 是 $\Omega = \pi$（对应连续频率 $f_s/2$）。

Q2：如何将连续系统的知识应用到离散系统中?

A：使用以下对应关系：

连续	离散
s（微分算子）	z（移位算子）
$H(s)$	$H(z)$
$H(j\omega)$	$H(e^{j\Omega})$
左半平面稳定	单位圆内稳定
卷积积分	卷积和
微分方程	差分方程
拉普拉斯变换	Z 变换

Q3: 零极点图分析在离散系统中和连续系统有什么不同?

A: - 连续系统：稳定边界是虚轴（竖直线），频率响应沿虚轴读取 - 离散系统：稳定边界是单位圆（圆形），频率响应沿单位圆读取

两者在几何直观上不同，但分析方法完全类似。

Q4: 为什么离散系统的频率响应是周期的?

A: 因为 $H(e^{j\Omega})$ 中的 $e^{j\Omega}$ 是 Ω 的周期函数（周期 2π）:

$$H(e^{j(\Omega+2\pi)}) = H(e^{j\Omega}e^{j2\pi}) = H(e^{j\Omega})$$

这是离散系统特有的性质——连续系统的频率响应 $H(j\omega)$ 不是周期的。

Q5: 如果系统不稳定，频率响应还有意义吗?

A: 没有。不稳定系统的输出会发散，不存在稳态。在不稳定系统中，$H(e^{j\Omega})$ 的表达式虽然可以" 算" 出来（代入 $z = e^{j\Omega}$），但不再具有" 频率响应" 的物理意义。

0.10.8 8.7 本章小结

核心公式

概念	公式
s-z 映射	$z = e^{sT_s}$
系统函数	$H(z) = \frac{\sum b_k z^{-k}}{\sum a_k z^{-k}}$
频率响应	$H(e^{j\Omega}) = H(z)\big\|_{z=e^{j\Omega}}$
正弦稳态	$y_{ss}[n] = \|H(e^{j\Omega_0})\| \cos(\Omega_0 n + \angle H)$
稳定性	所有极点 $\|p_i\| < 1$

必须掌握的能力

1. 理解 s 平面到 z 平面的映射关系
2. 能从差分方程求系统函数，反之亦然
3. 能计算和绘制离散系统的频率响应
4. 能用 Z 变换分析离散系统的响应
5. 能判断离散系统的稳定性
6. 能实现离散系统的方框图

连续与离散系统对比总结

```
连续系统                    离散系统

    微分方程                    差分方程
    冲激响应 h(t)               冲激响应 h[n]
    卷积积分 y = x * h         卷积和 y = x * h
    拉普拉斯变换 H(s)           Z变换 H(z)
    频率响应 H(j )            频率响应 H(e^{jΩ})
    稳定性：Re(p) < 0          稳定性：|p| < 1
    基本单元：积分器            基本单元：延迟器
```

0.10.9 8.8 综合例题

例题 6：完整系统分析

某离散 LTI 系统的差分方程为：

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

(1) 求系统函数 $H(z)$
(2) 判断系统稳定性
(3) 求频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 在 $\Omega = 0$ 和 $\Omega = \pi$ 处的值
(4) 求冲激响应 $h[n]$

解：

(1) 取 Z 变换：

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{4}z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

(2) 极点：$z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$

$$z = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.25 - 1}}{2} = \frac{0.5 \pm j\sqrt{0.75}}{2} = 0.25 \pm j0.433$$

$$|p| = \sqrt{0.25^2 + 0.433^2} = \sqrt{0.0625 + 0.1875} = \sqrt{0.25} = 0.5 < 1$$

所以系统**稳定**。

(3) 频率响应：

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1 + e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}$$

$\Omega = 0$：

$$H(e^{j0}) = \frac{1+1}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}$$

$\Omega = \pi$：

$$H(e^{j\pi}) = \frac{1-1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{0}{\frac{7}{4}} = 0$$

所以系统在直流 $(\Omega = 0)$ 处增益为 $8/3$，在最高频 $(\Omega = \pi)$ 处增益为 0——这是一个**低通滤波器。**

(4) 冲激响应：

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

写为 z 的形式：

$$H(z) = \frac{z(z+1)}{z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}} = \frac{z(z+1)}{(z - 0.25 - j0.433)(z - 0.25 + j0.433)}$$

对 $H(z)/z$ 展开：

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z+1}{(z - 0.25 - j0.433)(z - 0.25 + j0.433)}$$

(实际计算需使用复数部分分式，略)
由于极点在单位圆内，冲激响应是指数衰减的振荡序列。

0.10.10 8.9 课程总结

至此，我们已经完成了信号与系统课程的全部 8 章学习。以下是整个课程的知识框架：

知识框架总览

```
              信号与系统
             /          \
       连续系统          离散系统
      /    |    \      /    |    \
时域分析 频域分析 复频域 时域分析 Z域分析
```

微分方程	傅里叶	拉氏	差分方程	Z变换
卷积积分	变换	变换	卷积和	

核心思想

1. **分解**：复杂信号分解为简单信号的组合
2. **变换**：通过变换域简化问题
3. **LTI 系统的特征函数**：复指数信号 e^{st}/z^n 是 LTI 系统的特征函数
4. **对偶性**：连续和离散系统之间存在深刻的对应关系

祝学习顺利！